LABORATORIUM TERMODYNAMIKI

12 – Obliczanie rozkładu pola temperatury MRS

OPIS WYKONYWANIA ZADAŃ

Celem ćwiczenia jest określenie rozkładu pola temperatury w badanej próbce oraz wpływu przewodności cieplnej na ten rozkład za pomocą pakietu PDE (partial differential equations) działającego w środowisku MATLAB wykorzystującego metodę elementów skończonych.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Dana jest próbka w kształcie prostopadłościanu o wysokości H = 0,01 m i podstawie będącej kwadratem o boku b = 0,05 m wykonana z jednorodnego i izotropowego materiału o współczynniku przewodzenia ciepła λ = 0,204 W/(mK). Dolna powierzchnia próbki styka się z grzejnikiem elektrycznym o takim samym polu powierzchni co badana próbka, który w wyniku przepływu prądu elektrycznego o natężeniu I [A] i napięciu na nim U [V] generuje strumień ciepła o gęstości powierzchniowej

$$q = \frac{U \cdot I}{b^2} \tag{1}$$

Górna powierzchnia próbki zachowuje stałą temperaturę T_{wz} równą temperaturze chłodnicy przez którą przepływa woda z laboratoryjnego ultratermostatu. Boczne powierzchnie próbki są izolowane od otoczenia i traktowane jako powierzchnie adiabatyczne. Zakładając, że wymiana ciepła w próbce zachodzi tylko na drodze przewodzenia, pole temperatury w próbce T = T(x,y,z,τ) opisuje równanie różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego postaci

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = div[\lambda(T) grad(T)] \tag{2}$$

gdzie ρ - gęstość ciała, kgm^{-3} ; c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, $Jkg^{-1}K^{-1}$

div – operator dywergencji (np. jeśli znamy pole wektorowe $\vec{F} = [F_x, F_y, F_z]$, to

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{3}$$

grad(T) – operator gradientu - $grad(T) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$ (4)

Ponieważ równanie przewodzenia ciepła (2) jest pierwszego rzędu po czasie τ oraz drugiego rzędu po współrzędnych przestrzennych więc dla jednoznaczności jego rozwiązania należy podać warunki graniczne w postaci warunków początkowych i brzegowych.:

- warunek początkowy (WP) :

$$T\big|_{\tau=0} = T_0 \tag{5}$$

- warunki brzegowe (WB):

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma 1} = q, \quad T\big|_{\Gamma 3} = T_{wz}, \quad \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma 2} = \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma 4} = 0 \tag{6}$$

Gdzie $\frac{\partial T}{\partial n}$ jest pochodną temperatury w kierunku normalnym zewnętrznym do powierzchni, Γ_i oznaczają powierzchnie próbki.

W przypadku ustalonego przewodzenia ciepła nie wystepuje zależność temperatury od czasu, to znaczy $\frac{\partial T}{\partial \tau} \equiv 0$. Jeśli dodatkowo przyjąć, (i) przewodność cieplna materiału próbki λ nie zależy od temperatury, (ii) przewodzenie ciepła odbywa się tylko wzdłuż grubości próbki z, wówczas zagadnienie początkowo-brzegowe (2), (5)-(6) upraszcza się do postaci

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$$
$$-\lambda \frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = q, \quad T\Big|_{z=H} = T_{wz} \tag{7}$$

którego rozwiązaniem jest

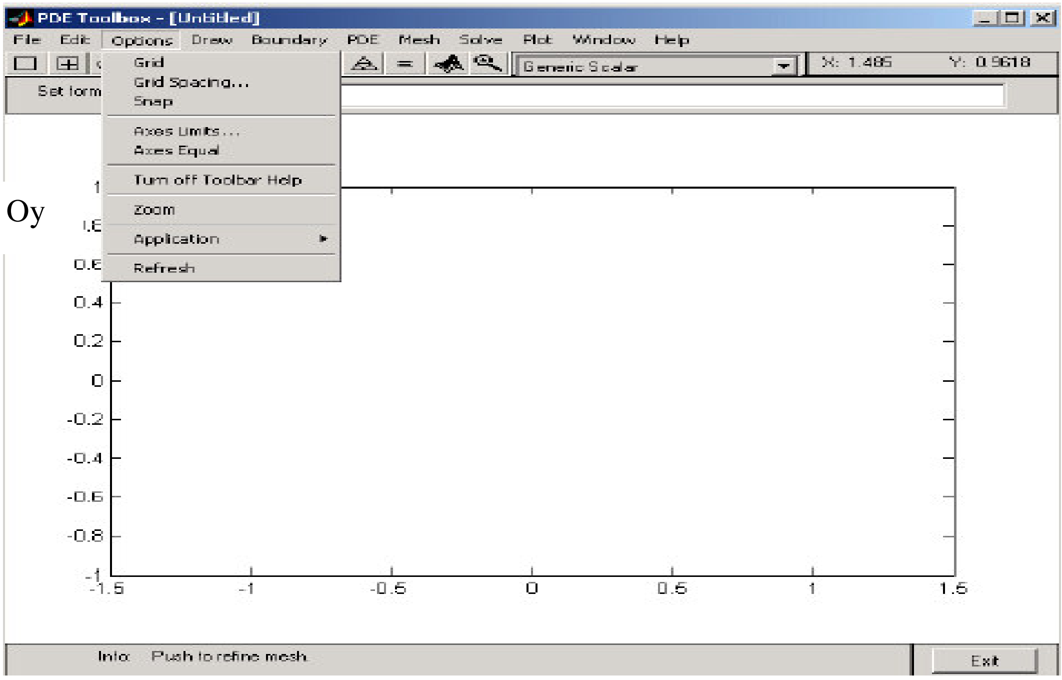
$$T(z) = \frac{q}{\lambda}(H - z) + T_{wz} \tag{8a}$$

Stąd widać, że najwyższa temperatura próbki występuje na powierzchni $z = 0$ i wynosi

$$T_{\max} = T(z=0) = \frac{q}{\lambda} H + T_{wz} \tag{8b}$$

2. WYKORZYSTANIE PAKIETU PDE DO OKREŚLENIA ROZKŁADU TEMPERATURY W PRÓBCE

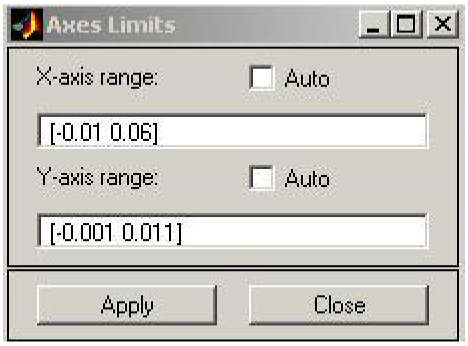
W celu uruchomienia pakietu PDE należy:
- włączyć komputer, a następnie uruchomić program MATLAB, którego ikona znajduje się na pulpicie;
- po załadowaniu programu MATLAB i wpisaniu komendy [*pdetool*], pojawi się następujące okno



Ox

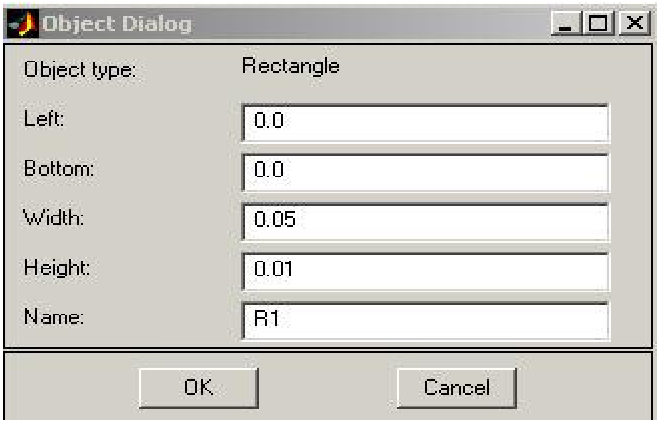
- wybrać typ zagadnienia z: [Options] → [Application] → [Heat Transfer]

- określić rozmiary osi: [Options] → [Access Limits] i wpisać

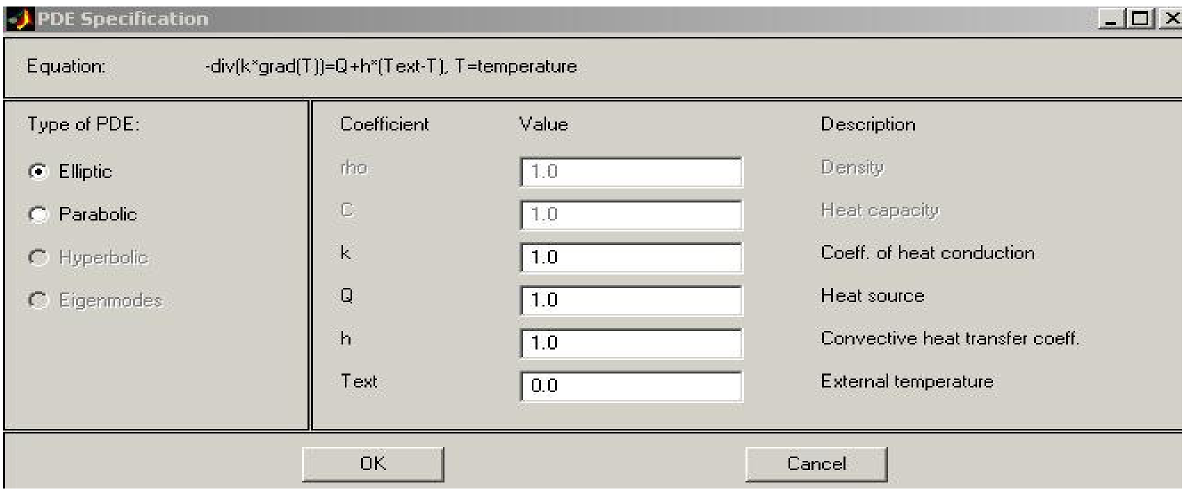


- narysować na ekranie przekrój próbki wzdłuż jej grubości (kliknąc na znak prostokąta znajdującego się w górnym pasku pod {File], przenieść pointer na pole edycyjne, a następnie trzymając wciśnięty lewy przycisk „myszy" nasysowac prostokąt)

- udokładnić współrzędne prostokąta najeżdżając poiterm na narysowany prostokąt i klikając dwukrotnie lewym przyciskiem „myszy" wpisać w polu [Object Dialog] współrzedne lewego dolnego i prawego górnego wierzchołka prostokąta



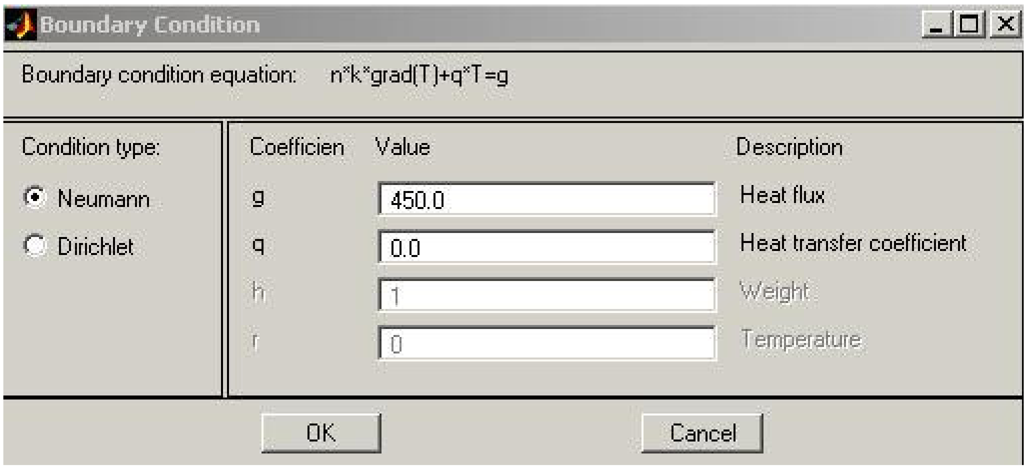
- określić parametry termofizyczne materiału probki: kliknąć ikonę PDE znajdująca się w górnym pasku zadań w wyniku czego pojawi się następujące okno dialogowe



W powyższym oknie [PDE Specification] zaznaczyć i wpisać:
typ PDE - Elliptic (odpowiada to ustalonemu przewodzeniu ciepła)
współczynnik przewodzenia ciepła (coeff of heat cond.) - k = 0.204
gęstość wew. źródeł ciepła (heat source) - Q = 0.0

współczynnik przejmowania ciepła (convective heat transf. coef.) - h = 0.0
temperatura zew. (external temperature) - Text = T_{wz}

- określić warunki brzegowe: kliknąć ikonę ∂Ω, pojawi sie brzeg obszaru
  Po dwukrotnym kliknięciu widocznych linii pojawi sieokno dialogowe [Boundary Condition]

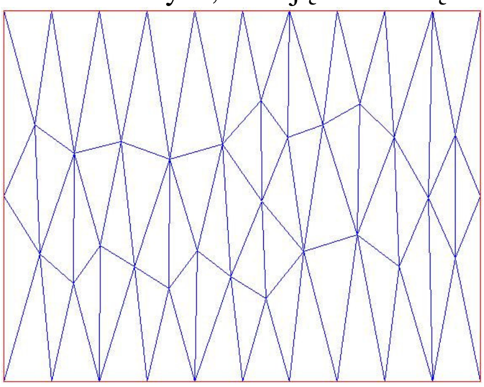


Dla dolnej linii prostkąta (zadana gęstość strumienia ciepła) zaznaczyć typ warunku brzegowego (condition type) jako warunek II-go rodzaju, czyli – Neuman
wpisać, gęstość strumienia ciepła (heat flux) – g = $U*I/b^2$ (U, I, z pomiarów)
wpisać, wspólczynnik przejmowania ciepła (Heat transf. coeff) - q = 0.0, OK.

Dla górnej linii prostokąta (zadana stała temperatura $T=T_{wz}$) zaznaczyć typ warunku brzegowego (condition type) – Dirichlet
wpisać, waga (weight) - h = 1
wpisać, temperatura - r = T_{wz} (z pomiarów)

Dla pozostałych dwóch boków zaznaczyć [Neuman] i wpisać g = 0.0, q = 0.0

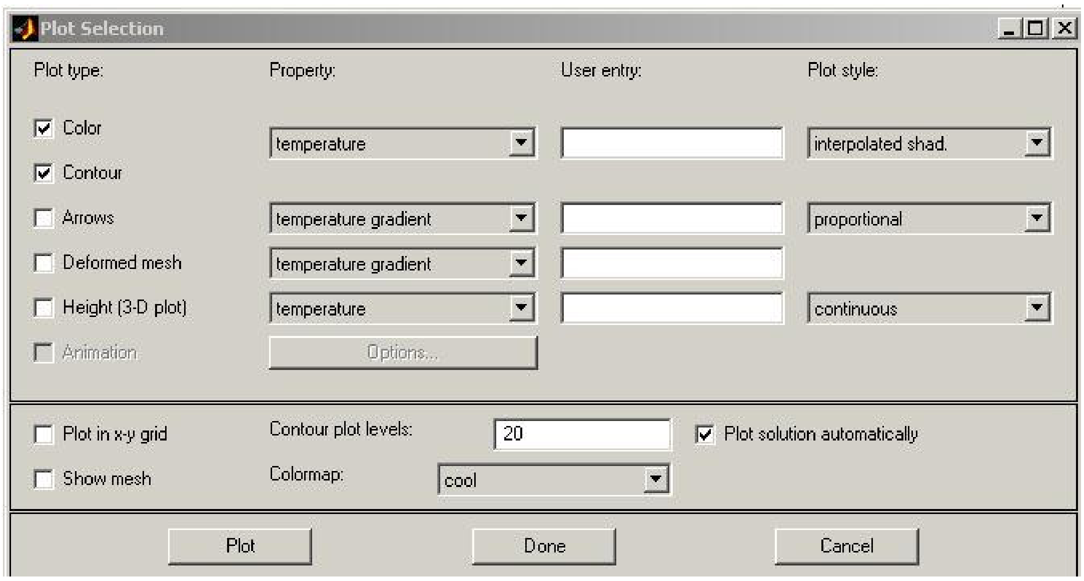
- pokryć obszar siatką elementów skończonych, klikając na ikonę w kształcie trójkąta



Jeżeli gęstość siatki elementów skończonych jest zbyt mała, to zagęścić siatke klikając na ikonę w kształcie trójkąt w trójkacie

- uruchomic solver, klikając na ikonę (=)

- wybrac sposób zobrazowania rozwiązania: [Plot] $\rightarrow$ [Parameters]



zaznaczyć w opcji [Plot type] : Color + Contour
wybrać w opcji [Property] wielkość do wizualizacji : Temperature albo Heat flux
kliknąć [Plot]

3. PRZEBIEG ĆWICZENIA

3.1. Przejść do stanowiska laboratoryjnego na którym przeprowadza się pomiar współczynnika przewodzenia ciepła (ćw. lab. nr 7) i odczytać:
- napięcie na grzejniku U = ... [V]
- natężenie prądu w grzejniku I = ... [A]
- temperaturę chłodnicy z wodą zimną U_{wz} = ...[mV] $\Rightarrow T_{wz}$=......... [^{o}C]

3.2. Obliczyć gęstość strumienia ciepła: $q = \eta \dfrac{U \cdot I}{0.0025}$, gdzie η - współczynnik strat. Przyjąć początkowo η = 1.0

3.3. Uruchomić MATLAB i wpisać [*pdetool*]

3.4. Wyznaczyć stacjonarne pole temperatury (pkt. 2). Rozwiązanie numeryczne na powierzchni z = 0 (naprowadzic poiter na dolny bok prostokąta i kliknąć lewy przycisk „myszy") porównać z rozwiązaniem analitycznym (8b).

3.5. Odczytać temperaturę T_g próbki od strony grzejnika (ćw. lab. nr 7). W wyniku porównania zmierzonej i obliczonej temperatury wyznaczyć współczynnik strat - η

3.6. Korzystając z pakietu PDE określić:
- wpływ przewodności cieplnej na rozkład temperatury w próbce (określić T_{max}-T_{min} dla λ_1 = 0,204 W/(mK), λ_2 = 2,04 W/(mK));

- wpływ współczynnika przejmowania ciepła α na pole temperatury (w opcji [Boudary Condition] założyć, że na brzegu x=b występuje warunek brzegowy

$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=b} = \alpha(T - T_{wz})$. Porównując to wyrażenie ze wzorem $n \cdot kgrad(T) + qT = g$ widzimy, że $g = \alpha \cdot T_{wz}$, $q = \alpha$. Przyjąć $\alpha = 10$ W/(m^{2}K) i wydrukować izotermy temperatury

3.7. Wyznaczyć przy pomocy PDE niestacjonarny rozkład temperatury w próbce, przyjmując:

gęstość materiału $\rho = 1200$ kg/m^3

przewodność cieplna $\lambda = 0,204$ W/(mK)

ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu $c_p = 800$ J/(kgK)

wsp. przejmowania ciepła na powierzchni x = b, $\alpha = 50$ W/(m^{2}K)

temperatura początkowo T(x, y, 0) = 20.0 ^{0}C

czas końcowy $t_f = 150$ s

W s k a z ó w k a: Zaznaczyć (<u>Parabolic</u>) w [PDE]→[PDE Specification] i wpisać wartości podanych parametrów

3.8. Określić jak zmienia się ($T_{max} - T_{min}$) jeśli zwiększymy 2-krotnie

przewodność cieplna λ

ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p