



## LABORATORIUM TERMODYNAMIKI

### ĆWICZENIE NR 11

dr inż. Marek Preiskorn

## OKREŚLANIE ROZKŁADU POLA TEMPERATURY METODĄ MODELOWANIA ANALOGOWEGO

### 11.1 Oznaczenia

a	współczynnik dyfuzyjności cieplnej, współczynnik wyrównywania temperatury	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$A_i$	część powierzchni brzegowej elementu otrzymanego w procesie dyskretyzacji	$\text{m}^2$
c	ciepło właściwe	$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$
$k_c, k_l, k_T$ $k_q, k_R,$	współczynniki wiążące odpowiadające sobie (analogiczne) wielkości pola temperatury i pola potencjału elektrycznego (patrz tablica 11.1)	
r, z, $\Theta$	współrzędne układu współrzędnych cylindrycznych	m
$R_{\lambda r}, R_{\lambda z}, R_{\lambda \Theta}$	opór cieplny liczony odpowiednio wzdłuż osi r, z, $\Theta$	$\frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}}$
$R_{\lambda x}, R_{\lambda y}, R_{\lambda z}$	opór cieplny liczony odpowiednio wzdłuż osi x, y, z	$\frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}}$
Re	rezystancja elektryczna	$\Omega$
T	temperatura	K
T	czas	S
x, y, z	współrzędne układu współrzędnych prostokątnych	m
V	potencjał elektryczny	V
$\alpha$	współczynnik przejmowania ciepła	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
$\lambda$	współczynnik przewodzenia ciepła	$\frac{\text{W}}{\text{m K}}$
$\rho$	gęstość	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\Delta r, \Delta z,$ $\Delta x, \Delta y$	kroki dyskretyzacji badanego pola wzdłuż odpowiednich współrzędnych geometrycznych	m
$\Delta t$	Krok dyskretyzacji czasu	s

2019-02-28

## 11.2 Modelowanie pola temperatury

Znajomość obciążeń cieplnych istniejących maszyn i urządzeń a także możliwość ich określenia dla maszyn będących dopiero na etapie projektowania jest bardzo ważna dla konstruktorów i eksploataatorów. Ekstremalne wartości temperatury w obiekcie decydują o doborze rodzaju materiału użytego do budowy a gradienty temperatury, decydujące o naprężeniach spowodowanych nierównomiernym nagrzaniem materiału obiektu, niosą dodatkowe informacje o konstrukcji i ewentualnej konieczności wprowadzenia zmian w sposobie jej chłodzenia.

Wartości temperatury w obiekcie można uzyskać na drodze eksperymentalnej za pomocą pomiaru temperatury w wybranych punktach lub na wybranych powierzchniach badanego elementu [1]. Dotyczy to zarówno wartości ustalonych jak i niestabilnych temperatury. Pomiar temperatury w każdym punkcie wewnątrz badanego obiektu lub w punktach bardzo blisko siebie położonych często jest trudny lub wręcz niemożliwy. Przy zastosowaniu konkretnego czujnika do pomiaru temperatury metodą stykową należy wziąć pod uwagę wpływ otworu do umieszczenia czujnika oraz samego czujnika na wartość temperatury w wybranym punkcie jak też i wzajemny wpływ czujników położonych blisko siebie. Każdy czujnik wywołuje lokalne zaburzenie pierwotnego pola temperatury. Na dostępnej części powierzchni zewnętrznych obiektu można dokonać pomiaru gęstości strumienia ciepła. Pomiar gęstości strumienia ciepła nie jest możliwy wewnątrz materiału obiektu.

Przy braku możliwości pomiaru temperatury w rzeczywistym obiekcie i w rzeczywistych warunkach pracy, do określenia wartości temperatury w każdym punkcie wewnątrz badanego obiektu wykorzystujemy modelowanie. Wyróżniamy dwa rodzaje modelowania:

- fizyczne,
- matematyczne

Modelowanie fizyczne jest badaniem zjawiska wymiany ciepła za pomocą modelu fizycznego, będącego odwzorowaniem rzeczywistego obiektu w dobranej skali geometrycznej (w powiększeniu lub pomniejszeniu). W specjalnie wykonanym modelu zachodzi to samo zjawisko fizyczne co w obiekcie badanym – przewodzenie ciepła. W modelu mierzy się wartości temperatury i gęstości strumienia ciepła. Modelowanie fizyczne jest trudne i pracochłonne, bardzo rzadko jest wykorzystywane w badaniach.

Modelem matematycznym zjawiska wymiany ciepła jest układ równań różniczkowych opisujących zjawisko wraz z warunkami jednoznaczności rozwiązania. Modelowaniem matematycznym będzie rozwiązanie równań opisujących, za pomocą jednej z wielu metod przy zachowaniu warunków jednoznaczności rozwiązania.

## 11.3 Model matematyczny wymiany ciepła w ciele stałym – główne założenia

Niestabilne pole temperatury w ciele stałym jest opisywane za pomocą równania różniczkowego niestabilnego przewodzenia ciepła, które dla zagadnienia trójwymiarowego w układzie współrzędnych  $x, y, z$  przyjmie postać [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (11.1)$$

gdzie:

$\lambda=\lambda(T)$ ,  $c=c(T)$ ,  $\rho=\rho(T)$  wartości właściwości termofizycznych zmieniają się w funkcji temperatury. Koniecznym jest podanie charakterystyk temperaturowych tych współczynników w całym zakresie spodziewanego zakresu zmian temperatury,

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$  - współczynnik dyfuzyjności cieplnej zwany też współczynnikiem wyrównywania temperatury.

Po przyjęciu założeń upraszczających:

- 1) stałych wartości właściwości termofizycznych  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ , uśrednionych dla przewidywanego zakresu zmian temperatury
- 2) przy braku wewnętrznych, objętościowych źródeł ciepła  $q_v=0$ ,

równanie (11.1) przyjmie postać równania Fouriera (zwanego ogólnie równaniem dyfuzji):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad (11.2)$$

gdzie:

$$\Delta T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{- laplasjan temperatury,}$$

Założenie niezmienności właściwości materiałowych w funkcji temperatury powoduje, że rozpatrywane zagadnienie staje się liniowym. Dodatkowym, bardzo często stosowanym uproszczeniem jest założenie niezmienności rozwiązania (wartości temperatury) wzdłuż jednej ze współrzędnych geometrycznych układu. Najczęściej dotyczy to zagadnień w których mamy do czynienia z symetrią kształtu obiektu i symetrią warunków brzegowych względem osi konstrukcji. Przy tych założeniach upraszczających rzeczywiste, trójwymiarowe, nieliniowe zagadnienie zostaje sprowadzone do liniowego dwuwymiarowego, płaskiego lub osiowo-symetrycznego problemu przewodzenia ciepła. Uproszczenia te można zapisać w postaci np.  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

dla zagadnienia dwuwymiarowego płaskiego lub  $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$  dla zagadnienia osiowo-symetrycznego.

W przypadku gdy zagadnienie przewodzenia ciepła jest ustalone to pochodna temperatury względem czasu jest równa zero i równanie Fouriera (11.2) przekształca się w równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T = 0 \quad (11.3)$$

Laplasjan temperatury może przyjmować różne postaci zapisu w różnych układach współrzędnych geometrycznych. Dla zagadnienia dwuwymiarowego w układzie współrzędnych kartezjańskich (x,y) ma postać

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11.4)$$

a dla zagadnienia osiowo-symetrycznego w układzie współrzędnych walcowych (r,z)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (11.5)$$

Dla uzyskania rozwiązania problemu opisanego za pomocą równania różniczkowego nieustalonego przewodzenia ciepła (11.1) należy określić warunki jednoznaczności rozwiązania:

- warunki geometryczne, które określają kształt badanego obiektu (bryłę w przypadku zagadnienia trójwymiarowego lub wybrany przekrój elementu dla zagadnienia dwuwymiarowego),
- warunki fizyczne, określające właściwości termofizyczne materiałów w badanym obiekcie (współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$ , ciepło właściwe  $c$ , gęstość  $\rho$ , współczynnik dyfuzyjności cieplnej  $a$ ). Wielkości te mogą zmieniać się w funkcji temperatury,
- warunki początkowe, zadające wartości temperatury w każdym punkcie badanego obiektu w początkowej chwili procesu ( $t=0$ ),
- warunki brzegowe, określające warunki wymiany ciepła na wszystkich powierzchniach badanego ciała w każdej chwili trwania badanego procesu.

Warunki początkowe i warunki brzegowe są nazywane warunkami granicznymi.

Wyróżnia się cztery rodzaje warunków brzegowych:

I rodzaju – zadane są wartości temperatury  $T_s$  na odpowiednich powierzchniach ciała w każdej chwili czasu przebiegu badanego procesu,

II rodzaju – określone są składowe gęstości strumienia ciepła  $q_s$ , prostopadłe do powierzchni brzegowej  $s$ , w każdej chwili czasu przebiegu badanego procesu,

$$q_{ns} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \quad (11.6)$$

Szczególnym przypadkiem warunku brzegowego drugiego rodzaju jest powierzchnia adiabatyczna (np. płaszczyzna lub oś symetrii), na której jest zadany warunek  $q_{ns} = 0$ .

III rodzaju – na powierzchni brzegowej są zadane wartości temperatury  $T_p$  czynnika otaczającego badany obiekt oraz wartości współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$  od czynnika otaczającego do obiektu dla każdego punktu części powierzchni brzegowej w każdej chwili czasu przebiegu badanego procesu,

$$q_s = \alpha(T_s - T_p) \quad (11.7)$$

gdzie :  $T_s$  – temperatura materiału ścianki na brzegu,

$T_p$  – temperatura płynu otaczającego badany obiekt.

IV rodzaju - występują przy idealnym styku dwóch ciał stałych. W punktach styku zachodzi równość wartości temperatury po obu stronach styku oraz równość składowych normalnych gęstości strumienia ciepła.

$$T_{s1} = T_{s2}$$

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{s1} = -\lambda_2 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{s2} \quad (11.8)$$

Rozwiązanie problemu wymaga rozwiązania równania różniczkowego (11.1) przy zadanych warunkach jednoznaczności rozwiązania. Jako wynik otrzymuje się wartości temperatury w każdym punkcie badanego obiektu w każdej chwili czasu. Na podstawie obliczonych wartości temperatury można wyznaczyć wartości lokalnych gradientów temperatury i lokalnych gęstości strumienia ciepła. Lokalne gradienty temperatury decydują o naprężeniach spowodowanych nierównomiernym nagraniem materiału. Otrzymane wyniki można przedstawić w postaci przebiegów linii stałych wartości czy kolorowej mapy przy określonej skali kolorów.

Istnieje szereg metod rozwiązania równania różniczkowego (11.1). W przypadku gdy kształt badanego pola jest prosty (prostokąt, okrąg, prostopadłościan, walec) i przy występowaniu nieskomplikowanych warunków brzegowych pierwszego i trzeciego rodzaju można zastosować metody analityczne np. metodę rozdzielania zmiennych lub metody operatorowe wykorzystujące przekształcenia Laplace'a i Fouriera. W takich przypadkach wykorzystuje się gotowe rozwiązania w postaci analitycznej, zawarte w specjalistycznych opracowaniach [3]. Przy złożonej budowie obiektu i złożonych, zróżnicowanych warunkach brzegowych do rozwiązania problemu opisanego równaniem (11.1) wykorzystuje się metody przybliżone, stosujące najczęściej zastąpienie równań różniczkowych przez odpowiednie równania różnicowe. W takich przypadkach do rozwiązania używa się najczęściej metod numerycznych, które w stosunkowo prosty sposób pozwalają na przybliżenie krzywoliniowego obszaru, zadanie anizotropowości właściwości termofizycznych materiału obiektu oraz zadanie zmiennych wartości warunków brzegowych. Metody te pozwalają na rozwiązanie zagadnień nieliniowych, gdy właściwości termofizyczne materiału i warunki brzegowe zmieniają się w funkcji temperatury. W ostatnich latach coraz powszechniejszym jest używanie gotowych pakietów oprogramowania do rozwiązania złożonych zagadnień m.in. wymiany ciepła wykorzystujących metody różnic skończonych MRS, metody elementów skończonych MES czy metody elementów brzegowych MEB. Do najbardziej popularnych pakietów należą ANSYS, COMSOL i COSMOSM. Wadami takiego trybu rozwiązania problemu są: konieczność poznania złożonej, najczęściej, obsługi zastosowanego pakietu i konieczność posiadania dostępu do takiego oprogramowania. Bariera jest duża cena zakupu programu i konieczność wnoszenia corocznej, niemałej opłaty przedłużenia licencji.

## 11.4 Modelowanie analogowe pola temperatury

Modelowanie analogowe, rozwinięte w latach 60-tych i 70-tych XX wieku jest metodą pozwalającą rozwiązać równanie opisujące za pomocą specjalnie zbudowanego modelu. W modelu zachodzi proces inny pod względem fizycznym niż zjawisko przewodzenia ciepła, lecz opis matematyczny zjawiska zachodzącego w rzeczywistym obiekcie i zjawiska zachodzącego w modelu analogowym jest identyczny. Oba zjawiska opisuje to samo równanie różniczkowe a odpowiadające sobie wielkości i parametry występujące w obu zjawiskach są do siebie proporcjonalne.

Ze względu na rodzaj zjawiska zachodzącego w modelu analogowym wyróżniamy następujące analogie:

- elektryczną,
- magnetyczną,
- hydrodynamiczną
- membranową.

W modelowaniu analogowym przebieg linii stałych wartości potencjału pola uzyskany na specjalnie zbudowanym modelu będzie identyczny jak przebieg linii stałej wartości temperatury w obiekcie rzeczywistym. Wartości temperatury oblicza się z wartości potencjału pola wytworzonego w modelu za pomocą wcześniej przyjętych współczynników proporcjonalności zwanych współczynnikami analogii.

W analogowych badaniach modelowych najczęściej wykorzystuje się analogię elektryczną pola temperatury i pola potencjału elektrycznego. Podstawowymi zaletami modeli elektrycznych jest prostota ich budowy, łatwe i znane metody pomiaru wielkości elektrycznych i szeroki dostęp do przyrządów mierzących wielkości elektryczne w sposób bardzo dokładny. W elektrycznym modelu analogowym zbudowana sieć rezystorów lub rezystancja przygotowanej bryły masy przewodzącej prąd elektryczny symuluje opory cieplne materiału rzeczywistego obiektu. Prądy i napięcia elektryczne przyłożone do brzegów modelu symulują cieplne warunki brzegowe dla rzeczywistego obiektu. Pomiar wartości napięcia w punktach modelu pozwala na przeliczenie ich na wartości temperatury w odpowiadających punktach rzeczywistego obiektu.

W tablicy 11.1 zestawiono podstawowe wielkości analogiczne pola temperatury i pola potencjału elektrycznego oraz ich powiązanie za pomocą współczynników analogii. W tablicy 11.2 podano warunki analogii, wiążące współczynniki analogii ze sobą, jakie muszą być spełnione przy prowadzonych badaniach modelowych za pomocą modeli elektrycznych. Dla uzyskania pełnej analogii przepływu prądu elektrycznego w zbudowanym modelu i przepływu ciepła w badanym obiekcie należy przyjąć cztery spośród współczynników wiążących jako niezależne. Pozostałe dwa współczynniki analogii zostaną obliczone z warunków analogii.

Określenie rozkładu pola temperatury za pomocą modelowania analogowego wykorzystującego modele elektryczne odbywa się w następujących etapach:

1. Określenie modelu matematycznego zjawiska przewodzenia ciepła zachodzącego w badanym obiekcie – wybór równania opisującego, zadanie kształtu pola, właściwości termofizycznych oraz warunków początkowych i brzegowych dla obiektu.

2. Wybór rodzaju modelu elektrycznego, zbudowanie modelu.
3. Zadanie na brzegach modelu, wartości napięcia i prądu elektrycznego odpowiadających zadanym wartościom temperatury i gęstości strumienia ciepła w rzeczywistych, cieplnych warunkach brzegowych.
4. Pomiar wartości napięcia elektrycznego w całej objętości modelu lub w wybranych jego punktach.
5. Przeliczenie wartości napięcia na wartości temperatury i wyznaczenie przebiegu linii izotermicznych.
6. Określenie maksymalnych wartości gradientów temperatury w obiekcie i gęstości strumienia ciepła (w zależności od potrzeb rozwiązania badanego problemu)

Tablica 11.1

Zestawienie wielkości analogicznych pola temperatury i pola potencjału elektrycznego

Wielkość w polu temperatury	Wielkość w polu potencjału elektrycznego	Współczynnik wiążący	Równanie wiążące
Temperatura $T$	Potencjał elektryczny $V$	$k_T$	$V = k_T * T$
Różnica temperatury $\Delta T$	Różnica potencjałów $\Delta V$	$k_T$	$\Delta V = k_T * \Delta T$
Gęstość strumienia ciepła $q$	Gęstość prądu elektrycznego $j$	$k_q$	$j = k_q * q$
Strumień ciepła $Q$	Natężenie prądu $i$	$k_q$	$i = k_q * Q$
Współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda$	Przewodność elektryczna właściwa $\frac{1}{\rho}$	$k_\lambda$	$\frac{1}{\rho} = k_\lambda * \lambda$
Pojemność cieplna $c_c$	Pojemność elektryczna właściwa $c_e$	$k_c$	$c_e = k_c * c_c$
Wymiar liniowy w obiekcie $l_c$	Wymiar liniowy w modelu $l_e$	$k_l$	$l_e = k_l * l_c$
Czas zjawiska $t$	Czas w modelu $t_e$	$k_t$	$t_e = k_t * t$
Opór cieplny $R_\lambda$	Rezystancja elektryczna $R_e$	$k_R$	$R_e = k_R * R_\lambda$
Ustalone pole temperatury $\nabla^2 T = 0$	Ustalone pole potencjału elektrycznego $\nabla^2 V = 0$		
Nieustalone pole temperatury $\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T$	Nieustalone pole potencjału elektrycznego $\frac{\partial V}{\partial t} = a \nabla^2 V$		
Prawo Fouriera $q = -\lambda \text{ grad } T$	Prawo Ohma $j = -\frac{1}{\rho} \text{ grad } V$		

## Warunki analogii konieczne do spełnienia przy modelowaniu za pomocą modeli elektrycznych

$\frac{k_\lambda}{k_l^2} = \frac{k_c}{k_\tau}$	$k_l * k_\lambda = k_q$
--	-------------------------

Ze względu na rodzaj materiału przewodzącego prąd elektryczny zastosowany do zbudowania modelu wyróżnia się trzy rodzaje elektrycznych modeli analogowych:

- ciągłe,
- dyskretne,
- kombinowane.

Model ciągły jest zbudowany z ciągłego w przestrzeni ośrodka przewodzącego prąd elektryczny. Do budowy tych modeli stosuje się elektrolity, masy przewodzące (mieszaniny sproszkowanego przewodnika z lepiszczem np. żywica i sadza) oraz papiery przewodzące. Modele elektrolityczne wykonuje się w postaci wanien w kształcie badanego obiektu wypełnionych elektrolitem – np. sezonowaną wodą wodociągową. Warunki brzegowe w tych modelach zadaje się za pomocą elektrod z folii miedzianej przyklejonych do wewnętrznych powierzchni ścianek modelu. Pomiar wartości napięć w modelu jest wykonywany za pomocą sondy zanurzonej w elektrolicie i połączonej z urządzeniem pomiarowym. W modelach ciągłych wykonanych z mas przewodzących lub papieru przewodzącego elektrody przykleja się do brzegu modelu lub maluje za pomocą farb bardzo dobrze przewodzących prąd (np. farba - srebro koloidalne). Modele ciągłe umożliwiają pomiar wielkości napięcia w każdym punkcie modelu, co znacznie upraszcza znajdowanie przebiegu linii ekwipotencjalnych. Na modelu wykonanym z papieru przewodzącego przebieg linii ekwipotencjalnych można wyrysować bezpośrednio na powierzchni papieru co od razu daje zobrazowanie wyniku eksperymentu.

Modele dyskretne są zbudowane z dyskretnych elementów elektrycznych – rezystorów i kondensatorów. Budowa modelu polega na dyskretyzacji (podziale) badanego obiektu małe elementy. W przypadku zagadnienia dwuwymiarowego będą to prostokąty pola. W środku każdego elementu jest węzeł. Opór cieplny ciągłego materiału jest zastąpiony układem rezystorów połączonych w węzle. Rezystory sąsiadujących ze sobą elementów łączą się w siatkę rezystorów stanowiącą odwzorowanie oporu cieplnego całego obiektu. Do zewnętrznych węzłów siatki dołącza się odpowiednio prądy i napięcia elektryczne. Model tego typu umożliwia pomiar napięcia wyłącznie w węzłach siatki. Zaletą tego modelu jest możliwość określenia lokalnej gęstości strumienia ciepła poprzez pomiar wartości prądu płynącego przez rezystor siatki.

Modele analogowe dyskretne zestawia się w postaci siatki rezystorów na specjalnych urządzeniach tablicowych zwanych Analizatorami pola. Głównymi zaletami modeli dyskretnych typu siatka rezystorów są uniwersalność w odwzorowaniu badanego pola oraz możliwość ponownego użycia tych samych elementów do budowy kolejnego modelu po rozłożeniu poprzednio zestawionego.



Modele kombinowane stanowią połączenie modeli elektrycznych ciągłych i dyskretnych, są stosowane najczęściej do rozwiązywania zagadnień trójwymiarowych. Przykładem takiego modelu jest połączenia płaszczyzn papieru przewodzącego, modelujących wybrane przekroje równoległe badanego przedmiotu, z siatką rezystorów modelującą przepływ ciepła między tymi przekrojami.

Za pomocą analogowych modeli elektrycznych można rozwiązywać zarówno ustalone jak i nieustalone zagadnienie przewodzenia ciepła stosując dwie metody modelowania:

- czasu ciągłego,
- czasu nieciągłego

Metoda czasu ciągłego wymaga dołączenia do węzłów modelu rezystorowego dodatkowych kondensatorów modelujących pojemności cieplne materiału badanego obiektu. Zmienne w funkcji czasu warunki brzegowe realizuje się przez dołączenie sterowanych źródeł napięcia i prądu do węzłów brzegowych modelu. Pomiar zmiennych w funkcji czasu wartości napięcia wymaga zastosowania urządzenia rejestrującego z wymaganą wysoką rezystancją wejściową. Pewną trudność może sprawić konieczność zapewnienia synfazowości zapisu rejestrowanych przebiegów zmian napięcia w wielu punktach modelu.

Metoda czasu nieciągłego zwana metodą Liebmana wymaga dołączenia do węzłów siatki modelu rezystorowego dodatkowych rezystorów symulujących zmianę napięcia w czasie kroku dyskretyzacji czasu. Metoda ta jest bardzo pracochłonna i jest stosowana zazwyczaj w przypadku niewielkiej liczby węzłów wewnętrznych modelu.

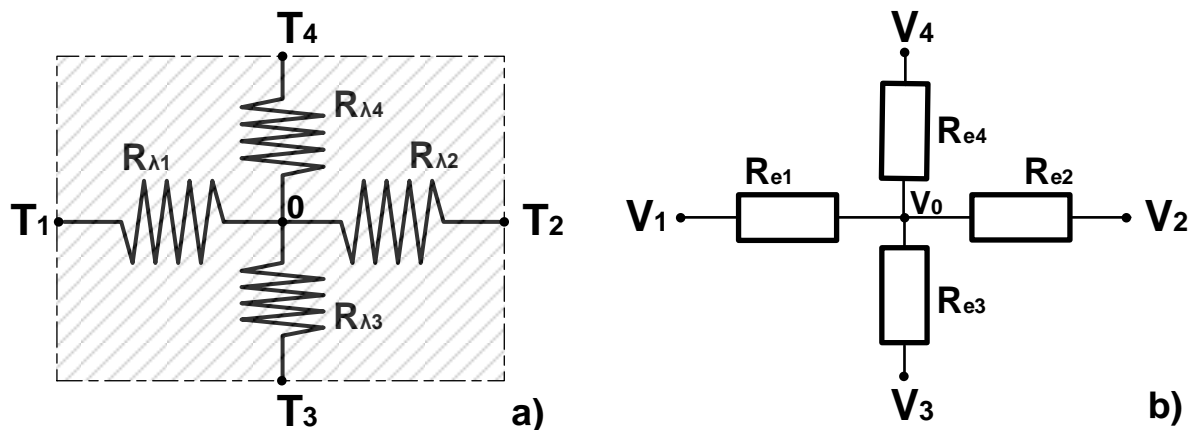
#### **11.4 Modelowanie dwuwymiarowego ustalonego pola temperatury za pomocą modelu analogowego typu siatka rezystorów**

Zasada budowy dyskretnych, analogowych modeli elektrycznych typu siatka rezystorów wykorzystuje analogię równania Laplace'a zapisanego w postaci różnicowej dla elementu prostokątnego wycinka pola temperatury, gdzie ciągły opór cieplny materiału zastąpiono układem czterech dyskretnych oporów cieplnych  $R_{\lambda 1}$  do  $R_{\lambda 4}$  – rysunek 11.1.a:

$$\nabla^2 T \cong \frac{T_1 - T_0}{R_{\lambda 1}} + \frac{T_2 - T_0}{R_{\lambda 2}} + \frac{T_3 - T_0}{R_{\lambda 3}} + \frac{T_4 - T_0}{R_{\lambda 4}} = 0 \quad (11.9)$$

do równania prawa Kirchhoffa dla sumy prądów układu czterech rezystorów  $R_{e1}$  do  $R_{e4}$  połączonych w jednym węźle o numerze 0 – rysunek 11.1.b:

$$\sum i_{1-4} = \frac{V_1 - V_0}{R_{e1}} + \frac{V_2 - V_0}{R_{e2}} + \frac{V_3 - V_0}{R_{e3}} + \frac{V_4 - V_0}{R_{e4}} = 0 \quad (11.10)$$



Rys. 11.1. a. Układ czterech dyskretnych oporów cieplnych  $R_{\lambda 1}$ - $R_{\lambda 4}$  wycinka materiału obiektu  
 b. Odpowiadający mu układ czterech rezystorów  $R_{e1}$ - $R_{e4}$  elektrycznego modelu analogowego

Budowę modelu typu siatka rezystorów rozpoczyna się od podziału badanego pola na dyskretne elementy powierzchni – prostokąty. Podziału dokonuje się na rysunku przekroju badanej części na papierze milimetrowym w odpowiedniej skali. Kreśli się linie równoległe do obu osi współrzędnych z wybranym, stałym wzdłuż osi, krokiem dyskretyzacji odpowiednio  $\Delta x$  i  $\Delta y$ . W wyniku podziału otrzymuje się prostokątne elementy powierzchni. Ciągły w przestrzeni opór cieplny materiału każdego elementu prostokątnego zastępuje się układem czterech dyskretnych oporów cieplnych (rys.11.1.a). W analogowym modelu elektrycznym będzie to odpowiadało czterem rezystorom, połączonym ze sobą w jednym węźle, modelującym opory cieplne i symulującym przepływ ciepła w dwóch prostopadłych kierunkach. Układ rezystorów pokazano na rysunku 11.1.b.

Wartości dyskretnych oporów cieplnych oblicza się z ogólnej zależności (11.11)

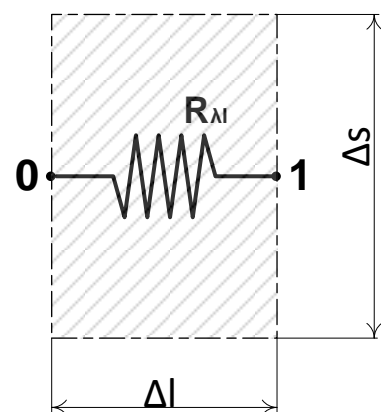
$$R_{\lambda l} = \frac{\Delta l}{\lambda_x \Delta s} \quad (11.11)$$

gdzie:

$R_{\lambda l}$  – opór cieplny elementu powierzchni liczony wzdłuż osi l (rysunek po prawej)

$\Delta l$ ,  $\Delta s$  – kroki dyskretyzacji geometrycznej, odpowiednio długość i szerokość części elementu powierzchni symulowanej przez opór cieplny

$\lambda_l$  - wartość lokalna współczynnika przewodzenia ciepła materiału obiektu dla kierunku wzdłuż osi l.



Dyskretne opory cieplne sąsiadujących elementów powierzchni łączą się ze sobą tworząc sieć pokrywającą cały przekrój badanej części. Układ rezystorów siatki modelu będzie dokładnie odpowiadał sieci oporów cieplnych.

Wartości oporów cieplnych elementu powierzchni uzyskuje się podstawiając odpowiednio rzeczywiste wartości kroków dyskretyzacji  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  oraz wartości  $\lambda_x$  lub  $\lambda_y$ . Wzór ten umożliwia obliczenie oporów cieplnych dla materiału o wartości współczynnika przewodzenia ciepła zmieniającej się w przestrzeni, np. przy materiale anizotropowym.

Wartości rezystancji  $R_e$  rezystorów modelu analogowego wylicza się z wcześniej obliczonych wartości oporów cieplnych  $R_\lambda$  za pomocą współczynnika wiążącego

$$R_e = k_R * R_\lambda \quad (11.12)$$

gdzie:  $k_R = \frac{1}{k_\lambda * k_t^2}$  - współczynniki wiążące analogii - oznaczenia patrz tablica 11.1.

Schemat oporów cieplnych pokrywających cały badany obszar staje się schematem elektrycznym siatki rezystorów modelu analogowego.

Obliczone wartości rezystancji poszczególnych rezystorów zestawia się z typowych rezystorów zabudowanych w pudełka, pokazanych na rysunku 11.2.a. Model Analogowy buduje się na tablicy przedniej Analizatora Pola AP-800-WAT. Na rysunku 11.2.b pokazano fragment płyty panelu czołowego AP-800-WAT z blaszkami węzłów i gniazdkami.



Rys.11.2.a Typowe rezystory zabudowane w pudełka



Rys.11.2.b Fragment tablicy przedniej Analizatora Pola z węzłami siatki

Rezystory modelu montuje się do gniazdek łącząc węzły i tworząc siatkę. Na rysunku 11.3 jest pokazany fragment siatki rezystorów modelu analogowego zestawiony na tablicy panelu AP-800-WAT.



Rys. 11.3 Fragment siatki analogowego modelu typu siatka rezystorów

Do zewnętrznych węzłów modelu zadaje się prądy i napięcia elektryczne oraz dodatkowe rezystory, oraz dodatkowe rezystory, odpowiednio do warunków brzegowych problemu.

Warunek brzegowy I rodzaju zadaje się za pomocą napięcia o wartości proporcjonalnej do zadanej temperatury. Wartość zadawanego napięcia oblicza się za pomocą współczynnika analogii  $k_T$

$$V = k_T * T \quad (11.13)$$

Warunek brzegowy II rodzaju zadaje się za pomocą prądu elektrycznego ze sterowanego źródła prądowego. Wartość natężenia prądu jest proporcjonalna do iloczynu zadanej wartości gęstości strumienia ciepła  $q_i$  i długości odcinka brzegu elementu brzegowego  $A_i$

$$i = k_q * q_i * A_i \quad (11.14)$$

Warunek brzegowy III rodzaju realizuje się za pomocą dodatkowego rezystora  $R_\alpha$  dołączanego do węzła brzegowego siatki, o wartości odwrotnie proporcjonalnej do współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$  zadanego na odcinku brzegu  $A_i$ . Rezystor jest zasilany napięciem proporcjonalnym do temperatury czynnika otaczającego  $T_P$ . Wartości oblicza się z zależności 11.15:

$$R_\alpha = k_R \frac{1}{\alpha_i * A_i} \quad (11.15)$$

$$U_P = k_T * T_P$$

Po zadaniu warunków brzegowych dokonuje się pomiaru wartości napięcia we wszystkich węzłach modelu analogowego. W pomiarach wygodnie jest posłużyć się rysunkiem badanego przekroju z zaznaczonymi położeniami wszystkich węzłów wewnętrznych i brzegowych. Wartość zmierzonego napięcia wpisuje się na rysunek przekroju obok odpowiedniego węzła. Wartości napięcia przelicza się na wartości temperatury w węzłach za pomocą zależności

$$T = \frac{1}{k_T} * U \quad (11.16)$$

Linie izotermiczne wykreśla się na rysunku przekroju korzystając z interpolacji geometrycznej przy założeniu liniowej zmiany wartości temperatury pomiędzy węzłami.

Badania rozkładów pól temperatury za pomocą analogowych modeli elektrycznych pozwalają na uzyskanie w krótkim czasie rozwiązań dla wielu różnych wariantów warunków brzegowych lub nieznacznych modyfikacji kształtu badanego przekroju. Umożliwia to zastosowanie tej metody w zadaniach optymalizacji kształtu lub przy doborze optymalnych warunków pracy urządzenia.

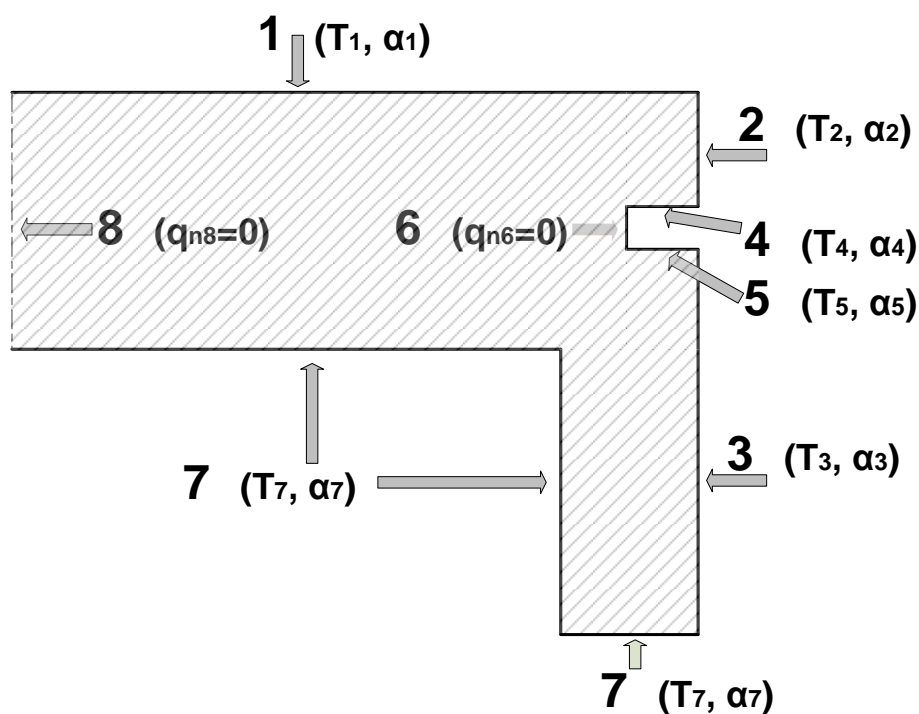
Analizator Pola AP-800-WAT jest uniwersalnym urządzeniem i w zestawie z siatką rezystorów stanowi swego rodzaju „maszynę matematyczną” do rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień polowych opisywanych równaniami Fouriera i Laplace’a. Analizator jest zbudowany w formie stojaka, na którym mocuje się osiem wymiennych modułów 100-węzłowych w układzie 10 x 10 węzłów. Przednia strona modułu stanowi pole siatki podstawowej. Rezystory siatki wstawia się pomiędzy gniazdkami sąsiadujących blaszek węzłów (rys. 11.2.b). Tylne strony modułów służą do dołączenia do węzła dodatkowych rezystorów symulujących wewnętrzne źródło ciepła lub krok czasowy przy rozwiązywaniu zagadnień nieustalonych metodą dyskretyzacji czasu. Tylne strony modułów pozwalają również na dołączenie do węzła dodatkowego kondensatora. Model typu siatka RC pozwala rozwiązać zagadnienie nieustalone metodą czasu ciągłego. Odpowiednie wartości napięcia uzyskuje się za pomocą dzielnika napięcia połączony z zasilaczem prądu stałego.

### **11.5 Wyznaczenie rozkładu pola temperatury w niechłodzonym tłoku silnika spalinowego**

Trójwymiarowe, nieliniowe zagadnienie wymiany ciepła w tłoku o zróżnicowanym kształcie zostało znacznie uproszczone do dwuwymiarowego, osiowoosymetrycznego zagadnienia liniowego. Jako pole obliczeniowe wybrano połowę przekrój tłoka w płaszczyźnie osiowej prostopadłej do osi sworzni tłokowego. W przekroju tym występują największe gradienty temperatury decydujące o wartościach naprężeń termicznych.. Tłok jest wykonany ze stopu lekkiego Mahle 140. Przyjęto średnią, dla spodziewanego zakresu temperatury 20 – 250°C, wartość współczynnika przewodzenia ciepła materiału tłoka

$$\lambda_{\text{tł}} = 120 \frac{W}{mK}$$

Model wymiany ciepła w tłoku przyjęty do badań przedstawiono na rysunku 11.4.



Rys.11.4 Model wymiany ciepła w tłoku silnika spalinowego przyjęty w ćwiczeniu (cyframi oznaczono strefy zadania warunku brzegowego, stałego dla całej strefy)

Tłok jest ogrzewany przez czynnik roboczy w komorze spalania silnika. Na powierzchni denka tłoka (strefa 1) przyjęto uśredniony w funkcji czasu warunek brzegowy III rodzaju [2,3]. Wartości temperatury czynnika roboczego dla całego zakresu kątów obrotu wału korbowego (O – 720 stopni OWK) obliczono na podstawie obliczeń termodynamicznych procesów zachodzących w komorze spalania. Wartości współczynnika przejmowania ciepła obliczono na podstawie kryterialnego wzoru Woschni [3], dającego najlepsze przybliżenie wartości zmieniających się wraz z obrotem wału korbowego. W modelu wymiany ciepła przyjęto stałe, średnie wartości temperatury czynnika roboczego  $T_1$  i współczynnika przejmowania ciepła od czynnika roboczego do ścianki tłoka  $\alpha_1$ . Wartości te są takie same dla całej powierzchni denka tłoka. W trakcie zajęć laboratoryjnych wartości  $T_1$  i  $\alpha_1$  podaje prowadzący zajęcia.

Tłok oddaje ciepło do tulei cylindrowej bezpośrednio i poprzez pierścień tłokowy. Dla uproszczenia pola przekroju tłoka przyjęto tylko jeden rowek pod pierścień tłokowy. Na powierzchni bocznej tłoka wydzielono dwie strefy (o numerach 2 i 3) warunku brzegowego III rodzaju. Przyjęte średnie wartości temperatury tulei i współczynników przejmowania ciepła wynoszą dla tych stref odpowiednio:

$$T_2 = 463 \text{ K} \quad \alpha_2 = 400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$T_3 = 433 \text{ K} \quad \alpha_3 = 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

Znaczna ilość ciepła jest odprowadzana przez pierwszy pierścień uszczelniający tłoka. Na powierzchniach stref 4 i 5 rowka pod pierścień zadano warunki brzegowe III rodzaju do pierścienia tłokowego:

$$\alpha_4 = 10\,000 \frac{W}{m^2K} \quad \text{i} \quad \alpha_5 = 30\,000 \frac{W}{m^2K}$$

Strefę 6 rowka pod pierścien przyjmuje się jako powierzchnię adiabatyczną. Stanowi to warunek brzegowy II rodzaju o wartości gęstości strumienia ciepła równej zero

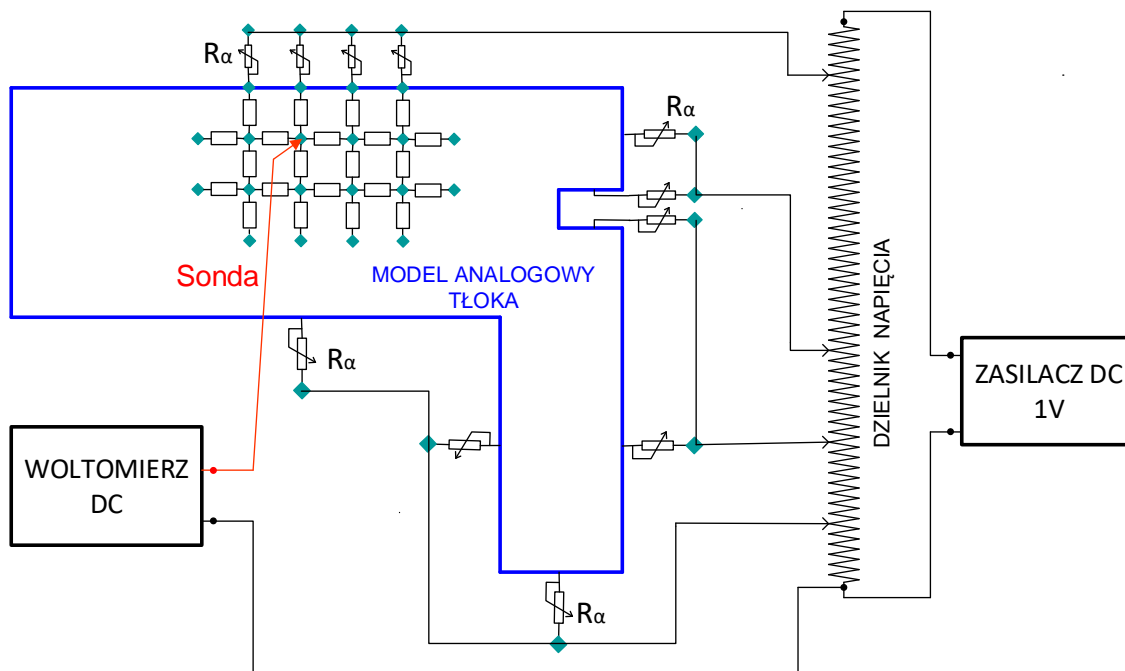
$$q_{n6} = 0$$

Tłok jest chłodzony od strony zawiesziny powietrzno-olejowej w skrzyni korbowej silnika. Dla strefy 7 powierzchni tłoka przyjęto warunek brzegowy III rodzaju

$$T_7 = 353 \text{ K} \quad \alpha_7 = 80 \frac{W}{m^2K}$$

Strefa 8 to oś tłoka. Przyjęto warunek symetrii względem osi –  $q_{n8}=0$ .

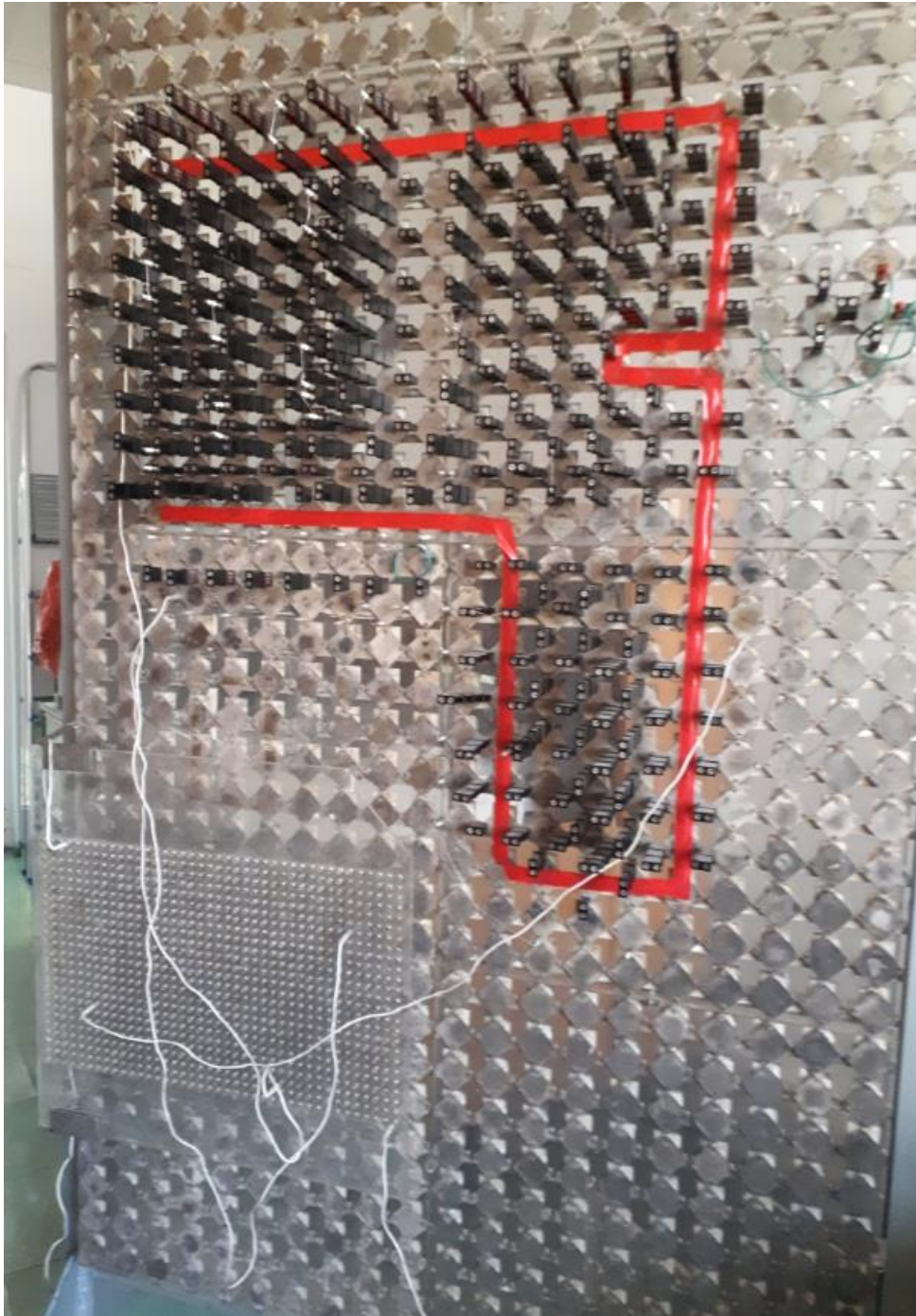
W celu zbudowania analogowego modelu elektrycznego typu siatka rezystorów pole przekroju tłoka podzielono na elementy prostokątne. Obliczono dyskretne opory cieplne elementów. Wyliczono wartości rezystancji rezystorów siatki modelu. Zestawiono siatkę modelu na polu siatki podstawowej Analizatora Pola AP-800-WAT według schematu sieci oporów cieplnych materiału tłoka. Do węzłów brzegowych modelu dołączono rezystory  $R_\alpha$  symulujące warunek brzegowy III rodzaju – odwrotnie proporcjonalne do lokalnej wartości współczynnika  $\alpha$ . Rezystory te zasilono napięciami o wartościach proporcjonalnych do wartości temperatury czynnika wymieniającego ciepło. Wartości napięcia uzyskuje się na nisko-rezystancyjnym dzielniku napięcia połączonym z zasilaczem prądu stałego. Wartości napięcia w węzłach siatki mierzy się za pomocą sondy połączonej z woltomierzem cyfrowym. Schemat blokowy modelu elektrycznego typu siatka rezystorów jest pokazany na rysunku 11.5.



Rys. 11.5 Schemat blokowy modelu elektrycznego typu siatka rezystorów tłoka silnika spalinowego



Widok analogowego modelu elektrycznego typu siatka rezystorów wymiany ciepła w tłoku zestawionego na płycie czołowej Analizatora Pola AP-800-WAT pokazano na rysunku 11.6.



Rys. 11.6 Widok modelu analogowego tłoka silnika spalinowego.  
U dołu widoczna płyta dzielnika napięcia z wyprowadzeniami.



## 11.7 Przebieg ćwiczenia

- Włączyć zasilacz.
- Zadać wartości napięć symulujących wartości temperatury dla warunków brzegowych III rodzaju – przyjąć wartość współczynnika  $k_T = 10^{-3} \frac{V}{K}$
- Zmierzyć wartości napięcia we wszystkich węzłach wewnętrznych i brzegowych modelu W trakcie pomiaru przeliczać zmierzone wartości napięcia na wartości temperatury według zależności (11.16), a przeliczone wartości temperatury wpisywać na rysunku przekroju tłoka odpowiednio przy mierzonym węźle. Rysunek pola przekroju tłoka z zaznaczonymi położeniami węzłów siatki modelu jest załączony na końcu opisu ćwiczenia.
- Wykreślić na rysunku przekroju tłoka przebieg linii izotermicznych. Wartości temperatury izoterm określi prowadzący ćwiczenie.
- Do arkusza kalkulacyjnego Excel wpisać wartości temperatur w węzłach zachowując położenie komórek arkusza takie jak węzłów na przekroju tłoka.
- Wprowadzić formatowanie warunkowe komórek arkusza z wpisanymi danymi za pomocą skali kolorów odwzorowując odpowiednio największe wartości temperatury za pomocą koloru czerwonego. Wydrukować uzyskaną kolorową mapę obrazującą wynik modelowania.

Rysunek tłoka z naniesionymi zmierzonymi wartościami temperatury i wrysowanymi izotermami oraz wydruk arkusza Excela z wynikami stanowią główny element sprawozdania. Ocenie podlega dokładność aproksymacji położenia wykreślanych izoterm. Dodatkowe elementy sprawozdania określi prowadzący ćwiczenia w trakcie zajęć.

## Literatura

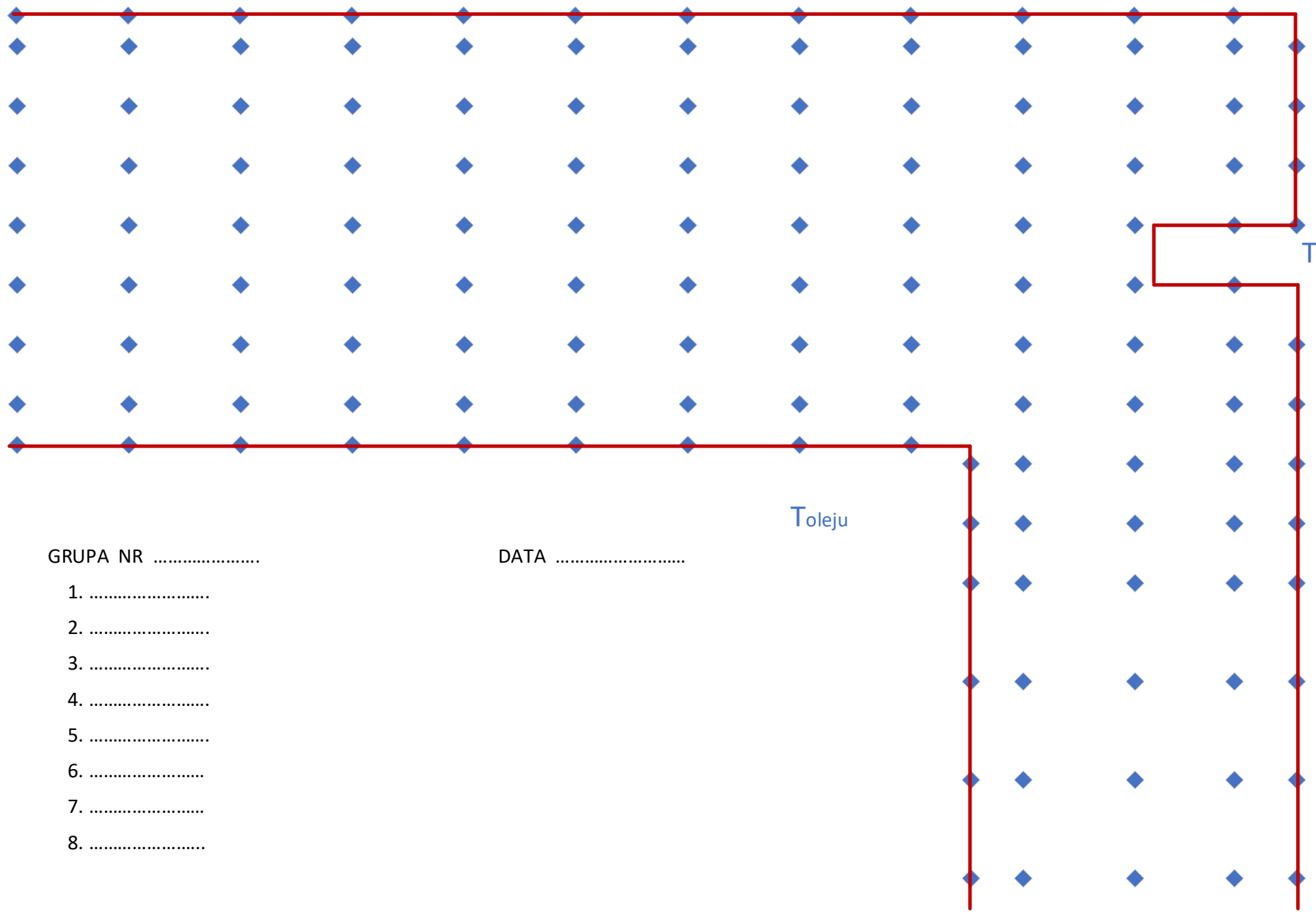
[1] Michalski L i inni: *Pomiary temperatury*. 1993, WNT, Warszawa

[2] Wiśniewski S. *Pomiary temperatury w badaniach silników i urządzeń cieplnych*. 1983, WNT, Warszawa

[3] Wiśniewski S., Wiśniewski T.: *Wymiana ciepła*. 2017, WNT, Warszawa

ĆWICZENIE NR 11 MODELOWANIE ANALOGOWE POLA TEMPERATURY W TŁOKU SILNIKA

$T_{\text{czynnika roboczego}}$



$T_{\text{tulei}}$

$T_{\text{oleju}}$

GRUPA NR .....

DATA .....

- 1. ....
- 2. ....
- 3. ....
- 4. ....
- 5. ....
- 6. ....
- 7. ....
- 8. ....