

**Zakład Aerodynamiki i Termodynamiki,
Instytut Techniki Lotniczej, Wydział Mechatroniki
Wojskowa Akademia Techniczna**

Numeryczne modelowanie ustalonego pola temperatury

Piotr Koniorczyk
Mateusz Zieliński

Warszawa 2018

Współczesne konstrukcje maszyn energetycznych cechuje dążenie do osiągnięcia wysokiej sprawności i dużej koncentracji mocy. Części tych maszyn bywają narażone na wysokie temperatury i wysokie naprężenia termiczne. Dlatego wielką uwagę przypisuje się do metod precyzyjnego obliczania pól temperatur w elementach o złożonych kształtach, przy założonych warunkach brzegowych. Wśród metod rozwiązywania równań przewodnictwa ciepła decydujące znaczenie mają metody numeryczne, w tym metoda różnic skończonych. Metody analityczne zawodzą przy skomplikowanych kształtach współczesnych maszyn i mogą jedynie służyć do sprawdzania dokładności rozwiązana pozostałymi metodami.

1. Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych polega na aproksymacji pochodnych ilorazami różnicowymi. W celu wyprowadzenia wzorów różnicowych dla pochodnych $\frac{\partial T}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial T}{\partial y}$ stosuje się rozkład funkcji $T(x, y)$ w szereg Taylora wokół punktu $x_{i,j}$. Z rozkładu wynika, że dla pochodnej $\frac{\partial T}{\partial x}$ szereg przybiera postać:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (1)$$

Po przekształceniu zależności (1) otrzymujemy pochodną $\frac{\partial T}{\partial x}$ w postaci ilorazu różnicowego:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)}{2} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (2)$$

Podobnie wygląda sytuacja dla pochodnej $\frac{\partial T}{\partial y}$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta y)}{2} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial y^3}\right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta y)^2}{6} + \dots \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (3)$$

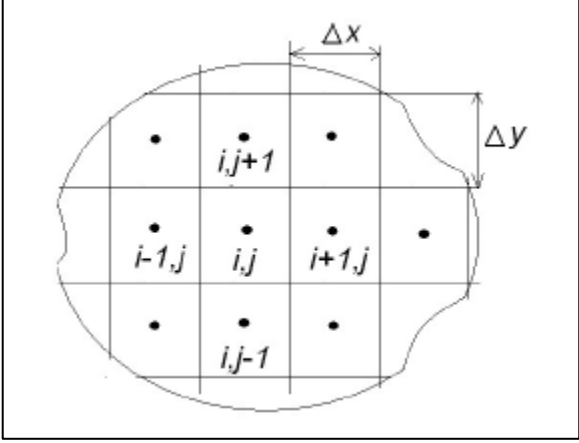
Dla przypadku ustalonego przewodzenia ciepła w ciele o stałym współczynniku przewodzenia ciepła oraz braku wewnętrznych źródeł ciepła równanie przewodzenia ciepła przyjmuje postać *równania różniczkowego Laplace'a*:

$$\nabla^2 T = \Delta T = 0 \quad (4)$$

które dla przypadku dwuwymiarowego ma postać:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} = 0 \quad (5)$$

Przykładowo dla obszaru przedstawionego na rys. 1 pierwsze pochodne dla punktu o indeksach i,j przyjmują postać (6):



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \end{array} \right. \quad (6)$$

Rys. 1 Przykładowy obszar dyskretyzacji metoda różnic skończonych

Na podstawie ilorazów różnicowych pierwszych pochodnych zostały wyznaczone ilorazy różnicowe drugich pochodnych dla punktu o indeksach i,j :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{(\partial T / \partial x)_{i,j} - (\partial T / \partial x)_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{(\partial T / \partial y)_{i,j} - (\partial T / \partial y)_{i,j-1}}{\Delta y} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (7)$$

Po podstawieniu ilorazów różnicowych (7) do wyrażenia (5), otrzymano następujące zależności:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (8)$$

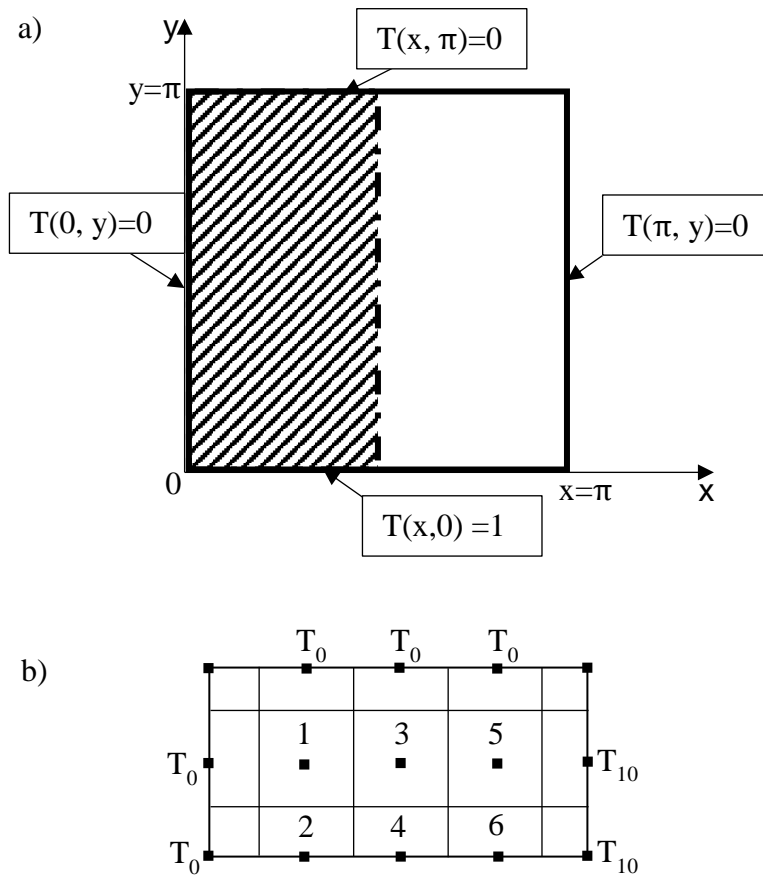
$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (9)$$

Z wyrażenia (9) wynika, że temperatura dla punktu $T_{i,j}$ stanowi średnią arytmetyczną (10):

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}. \quad (10)$$

1.1. Przykład zastosowania metody różnic skończonych (MRS)

Obliczyć pole rozkładu temperatury w płytce kwadratowej p boku π , ogrzewanej z jednego boku. Widok płytki przedstawiono na rys. 2a.



Rys. 2 a). Płytką kwadratową ogrzewana wzdłuż jednego boku, b) dyskretyzacja połowy pola kwadratu i numeracja węzłów przy kroku dyskretyzacji $\pi/4$.

Przyjęto następujące warunki brzegowe (WB) I rodzaju na obwodzie płytki:

$$\begin{aligned} T(0, y) = T(\pi, y) = 0 & \quad \text{dla } 0 < y < \pi \\ T(x, 0) = 1 & \quad \text{dla } 0 < x < \pi \\ T(x, \pi) = 0 & \quad \text{dla } 0 < x < \pi \end{aligned} \quad (11)$$

Na rysunku 2b przedstawiono dyskretyzowany obszar do obliczeń. Ze względu na symetryczny charakter rozpatrywanego przypadku dyskretyzacji podlega tylko połowa obszaru

kwadratowej płytki. Przez węzły 2,4,6 przebiega oś symetrii płytki. Dyskretyzacja została przeprowadzona tak, aby część węzłów znalazła się dokładnie na brzegu obszaru. W węzłach oznaczonych T_0 i T_{10} przyjęto wartości zgodne z warunkami brzegowymi: $T_0 = 0$ a $T_{10} = 1$.

Dla węzła 1 zgodnie z przedstawioną siatką na rysunku 2b) oraz zależnością (9) mamy:

$$T_3 + T_0 + T_2 + T_0 - 4T_1 = 0 \quad (12)$$

gdzie $T_{i+1,j} = T_3, T_{i-1,j} = T_0, T_{i,j+1} = T_2, T_{i,j-1} = T_0$

Czyli temperatura w węźle 1 będzie równa

$$T_1 = \frac{T_3 + T_0 + T_2 + T_0}{4} \quad (13)$$

Porządkując składniki wyrażenia (12) oraz dodając do niego temperatury dla węzłów 4,5,6 wraz z zerowymi współczynnikami otrzymano zależność o postaci:

$$-4T_1 + T_2 + T_3 + 0T_4 + 0T_5 + 0T_6 = -2T_0 \quad (14)$$

Powtarzając powyższe operacje dla pozostałych węzłów (od 2 do 6) uzyskano układ równań liniowych:

$$\begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_3 + 0 + 0 + 0 = -2T_0 \\ T_1 - 4T_2 + 0 + T_4 + 0 + 0 = -T_0 \\ T_1 + 0 - 4T_3 + T_4 + T_5 + 0 = -T_0 \\ 0 + T_2 + 2T_3 - 4T_4 + 0 + T_6 = 0 \\ 0 + 0 + T_3 + 0 - 4T_5 + T_6 = -(T_0 + T_{10}) \\ 0 + 0 + 0 + T_4 + 2T_5 - 4T_6 = -T_{10} \end{cases} \quad (15)$$

Który można zapisać przy pomocy następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie: A-macierz współczynników, T-wektor temperatur, B-wektor wyrazów wolnych.

Układ równań liniowych w postaci macierzowej przyjmuje następującą postać:

$$A \cdot T = B \quad (17)$$

Rozwiązanie tak przedstawionego układu równań przeprowadzono przy pomocy macierzy odwrotnej oraz metod iteracyjnych. Zastosowanie macierzy odwrotnej do macierzy A pozwala uzyskać zależność:

$$T = A^{-1} \cdot B \quad (18)$$

Tak uzyskany układ równań można rozwiązać przy pomocy arkusza kalkulacyjnego Excel lub pakietu obliczeniowego Matlab. Poniżej została przedstawiona instrukcja jak przeprowadzić obliczenia z wykorzystaniem macierzy odwrotnej w programie EXCEL.

1.2. Obliczenia układu równań przy pomocy programu EXCEL.

Krok 1: Utworzyć macierz A zawierającą współczynniki równań. Na rys. 3 został przedstawiony przykład utworzonej macierzy współczynników A.

Macierz A	-4	1	1	0	0	0
	2	-4	0	1	0	0
	1	0	-4	1	1	0
	0	1	2	-4	0	1
	0	0	1	0	-4	1
	0	0	0	1	2	-4

Rys. 3 Macierz A zawierająca współczynniki równań liniowych

Krok 2: Utworzyć wektor B zawierającą wyrazy. Na rys. 4 został przedstawiony przykład utworzonego wektora wyrazów wolnych B.

Macierz B	0
	0
	0
	0
	-1
	-1

Rys. 4 Wektor B zawierający wyrazy wolne

Krok 3: Zaznaczyć obszar, w którym mają znajdować się wartości macierzy odwrotnej A^{-1} . Wcisnąć kombinację klawiszy $Ctrl+Shift+F2$ a następnie po znaku „=” wprowadzić formułę `MACIERZ.ODW(tablica)` wstawiając jako argument *tablica* zakres komórek obejmujący wartości macierzy A. Kolejno zatwierdzić działanie formuły poprzez naciśnięcie kombinacji klawiszy $Ctrl+Shift+Enter$. Na rys. 5 został przedstawiony przykład obliczania macierzy odwrotnej A^{-1} . Rys. 6 przedstawia wynik obliczeń przykładowej macierzy odwrotnej A^{-1} .

Macierz odwrotna A^{-1}	=MACIERZ.ODW(C6:H11)					

Rys. 5 Obliczanie macierzy odwrotnej A^{-1}

Macierz odwrotna A^{-1}	-0,330357	-0,09821	-0,125	-0,0625	-0,04464	-0,02679
	-0,196429	-0,33036	-0,125	-0,125	-0,05357	-0,04464
	-0,125	-0,0625	-0,375	-0,125	-0,125	-0,0625
	-0,125	-0,125	-0,25	-0,375	-0,125	-0,125
	-0,044643	-0,02679	-0,125	-0,0625	-0,33036	-0,09821
	-0,053571	-0,04464	-0,125	-0,125	-0,19643	-0,33036

Rys. 6 Macierz odwrotna A^{-1}

Krok 5: Zaznaczyć obszar, w którym mają się znajdować wartości wektora temperatur T . Weisnąć kombinację klawiszy $Ctrl+Shift+F2$ a następnie po znaku „=” wprowadzić formułę `MACIERZ.ILOCZYN(tablica1;tablica2)` podstawiając pod argument *tablica1* zakres komórek obejmujący wartości macierzy odwrotnej A^{-1} a pod argument *tablica2* zakres komórek obejmujący wartości wektora B . Kolejno zatwierdzić działanie formuły poprzez naciśnięcie kombinacji klawiszy $Ctrl+Shift+Enter$. Na rysunku 7 został przedstawiony przykład obliczania wartości macierzy temperatur T . Rys. 8 przedstawia wynik obliczeń wartości macierzy temperatur T .

Macierz T	=MACIERZ.ILOCZYN(K6:P11;C14:C19)	
		T_2
		T_3
		T_4
		T_5
		T_6

Rys. 7 Obliczanie wektora temperatur T

Macierz T	0,0714286	T_1
	0,0982143	T_2
	0,1875	T_3
	0,25	T_4
	0,4285714	T_5
	0,5267857	T_6

Rys. 8 Wektor temperatur T

2. Metoda kolejnych przybliżeń, metoda nadrelaksacji

Metoda kolejnych przybliżeń korzysta z zależności (10) w obliczaniu wartości temperatury w węzłach zadanego przypadku. Założono początkowy rozkład temperatury w taki sposób jak na rys. 9.

	0	0	0	
0	0,4000	0,4000	0,4000	0
0	0,6000	0,6000	0,6000	0
0	0,8000	0,8000	0,8000	0
	1	1	1	

Rys. 9 Założony rozkład temperatury

Następnie obliczono w poszczególnych węzłach (komórkach) wartości na podstawie zależności (10) za każdym razem podstawiając w wybranym węźle nową wartość. Kolejność przeliczenia w pierwszym przybliżeniu została przedstawiona na rys. 10.

a	0	0	0		d	0	0	0		g	0	0	0	
0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,2000	0,4000	0,4000	0
0	0,6000	0,6000	0,6000	0	0	0,4000	0,6000	0,6000	0	0	0,4000	0,5375	0,3813	0
0	0,6000	0,8000	0,8000	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0
	1	1	1			1	1	1			1	1	1	
b	0	0	0		e	0	0	0		h	0	0	0	
0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,2000	0,2844	0,4000	0
0	0,6000	0,6000	0,6000	0	0	0,4000	0,5375	0,6000	0	0	0,4000	0,5375	0,3813	0
0	0,6000	0,7500	0,8000	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0
	1	1	1			1	1	1			1	1	1	
c	0	0	0		f	0	0	0		i	0	0	0	
0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,4000	0,4000	0,4000	0	0	0,2000	0,2844	0,1664	0
0	0,6000	0,6000	0,6000	0	0	0,4000	0,5375	0,3813	0	0	0,4000	0,5375	0,3813	0
0	0,6000	0,7500	0,5875	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0	0	0,6000	0,7500	0,5875	0
	1	1	1			1	1	1			1	1	1	

Rys. 10 Kolejność obliczeń w pierwszym przybliżeniu

Rysunek powyżej prezentuje tylko pierwsze przybliżenie. Aby wyniki dla metody iteracyjnej były zbliżone z wynikami uzyskanymi przy pomocy macierzy odwrotnej należało powtórzyć obliczenia około 15 razy. Na rys. 11 przedstawiono wyniki obliczeń.

	0	0	0	
0	0,0714	0,0982	0,0714	0
0	0,1875	0,2500	0,1875	0
0	0,4286	0,5268	0,4286	0
	1	1	1	

Rys. 11 Wynik obliczeń metodą kolejnych przybliżeń rozpatrywanego przypadku

W celu szybszego uzyskania rozwiązania stosuje się modyfikację metody kolejnych przybliżeń poprzez wprowadzenie współczynnika relaksacji. Jeśli współczynnik relaksacji ω będzie zawierać w przedziale (1;2) to metodę nazywamy wtedy nadrelaksacją.

Współczynnik relaksacji do wyrażenia (10) wprowadza się w następujący sposób:

$$T_{i,j}^{(n+1)} = (1-\omega) \cdot T_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega \cdot (T_{i+1,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)} + T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)})}{4} \quad (20)$$

3. Podstawowe źródła błędów występując w obliczeniach numerycznych i pojęcia związane z błędami

Zagadnienia rozwiązywane przy pomocy metod numerycznych na ogół są obarczone pewnym błędem. Można rozróżnić następujące błędy:

- Błędy metody – związane są ze sformułowaniem samego zagadnienia matematycznego które rzadko opisuje realne zjawiska a raczej wyidealizowany model.
- Błędy obcięcia – związane są z koniecznością zakończenia obliczeń na pewnym wyrazie ciągu bądź sumy szeregu która jest wykorzystywana w obliczeniach numerycznych.
- Błędy zaokrąglenia – powstają one w wyniku zaokrąglenia liczby, które polega na odrzuceniu z niej wszystkich cyfr, poczynając od pewnego miejsca.
- Błędy początkowe – występują one w związku z obecnością we wzorach matematycznych parametrów liczbowych, których wartość można określić jedynie w przybliżeniu, np. stałe fizyczne.
- Błędy działań arytmetycznych – związane są z wykonywaniem działań arytmetycznych na liczbach przybliżonych. W wyniku działań arytmetycznych na liczbach przybliżonych przenosimy do obliczeń błędy danych początkowych.

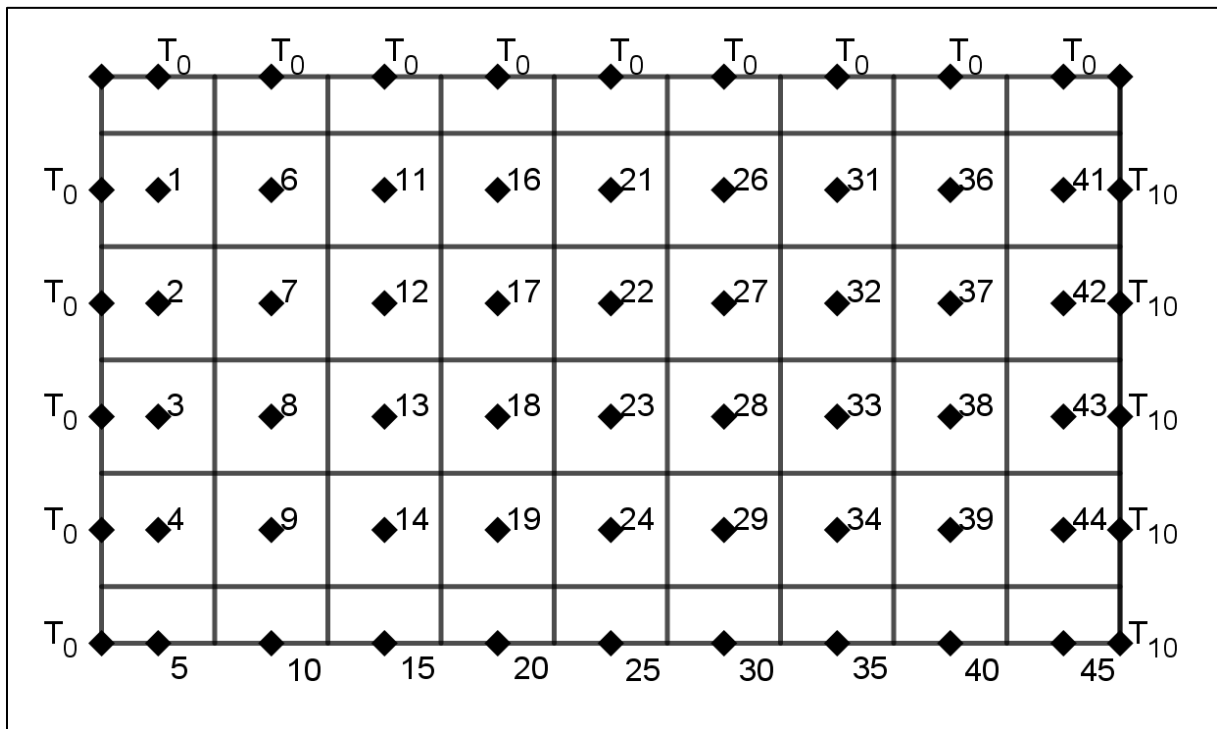
Błędem bezwzględnym Δ liczby przybliżonej a nazywa się wartość bezwzględną różnicy pomiędzy liczbą dokładną A i liczbą przybliżoną a

$$\Delta = |A - a| \quad (21)$$

Błędem względnym δ liczby przybliżonej a nazywamy stosunek błędu bezwzględnego Δ tej liczby do wartości bezwzględnej liczby dokładnej A ($A \neq 0$)

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \quad (22)$$

4. Przebieg ćwiczenia



Rys. 9 Dyskretyzacja połowy pola kwadratu i numeracja węzłów przy kroku dyskretyzacji 0,1 π

Rozwiązanie analityczne dla przykładu przedstawionego na rysunku 9 przyjmuje postać szeregu (23)

$$T(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)x] \sinh[(2n-1)(\pi-y)]}{(2n-1) \sinh[(2n-1)\pi]} \quad (23)$$

oraz przy założeniu liczby wyrazów szeregu $n=38$ uzyskuje się rozwiązanie przedstawione w tabeli 1 poniżej.

Tabela 1 Wyniki obliczeń analitycznych

y	x				
	0,1Π	0,2Π	0,3Π	0,4Π	0,5Π
0,9Π	0,0109	0,0208	0,0285	0,0334	0,0351
0,8Π	0,0230	0,0437	0,0599	0,0702	0,0737
0,7Π	0,0375	0,0711	0,0972	0,1138	0,1194
0,6Π	0,0562	0,1060	0,1444	0,1684	0,1765
0,5Π	0,0816	0,1528	0,2063	0,2391	0,2500
0,4Π	0,1180	0,2178	0,2895	0,3316	0,3454
0,3Π	0,1745	0,3122	0,4028	0,4523	0,4679
0,2Π	0,2740	0,4563	0,5569	0,6060	0,6208
0,1Π	0,4891	0,6823	0,7594	0,7923	0,8017

1. Uruchomić arkusz Excela załączony do instrukcji.
2. Otworzyć arkusz „*Obliczenia temperatury*”.
3. Korzystając z funkcji macierzowych obliczyć macierz odwrotną macierzy wyznaczników A^{-1} .
4. Korzystając z funkcji macierzowych wyznaczyć wartości wektora temperatur T poprzez obliczenie iloczynu wektora wyrazów wolnych B i macierzy odwrotnej A^{-1} .
5. Wprowadzić wyniki obliczeń wartości temperatur zawartych w wektorze T do tabeli nr 2 (Arkusz: „*Rozkład Tem. i Obl. Błędu*”) tak aby uzyskać rozkład zgodny z rys. 9.
6. Z wykorzystaniem wyrażeń (19) i (20) obliczyć błąd bezwzględny i względny w odniesieniu do wyników obliczeń analitycznych. Zamieszczonych w tabeli nr 1 (Arkusz: „*Rozkład Tem. i Obl. Błędu*”). Uzyskane wyniki zamieścić odpowiednio w tabelach 2Δ i 2δ.
7. Korzystając z arkusza „*Metoda kolejnych przybliżeń*” ustalić liczbę iteracji jaka jest potrzebna do obliczenia zadanego przypadku.
8. Korzystając z arkusza „*Metoda kolejnych przybliżeń*” ustalić liczbę iteracji dla metody nadrelaksacji przy zmianie współczynnika nadrelaksacji od 1,1 do 1,9 w kroku co 0,1.
9. Obliczyć błąd bezwzględny i względny dla metody kolejnych przybliżeń i nadrelaksacji przy współczynniku o najszybszej zbieżności. Wyniki rozkładu oraz błędów zamieścić w tabelach 3, 3Δ i 3δ oraz 4, 4Δ i 4δ w arkuszu „*Rozkład Tem. i Obl. Błędu*”.

5. Pytania

1. Napisać postać różniczkową równania Laplace'a dla przypadku dwuwymiarowego.
2. Czym jest temperatura T_{ij} w dowolnym punkcie siatki dla dwuwymiarowego przypadku ustalonej wymiany ciepła w ciele o stałym współczynniku przewodzenia ciepła oraz braku wewnętrznych źródeł ciepła?
3. Dla jakiego przypadku przewodzenia ciepła wykorzystywane jest *równanie różniczkowe Laplace'a*?
4. Wypisać zależności na obliczanie błędu względnego i bezwzględnego oraz opisać je.
5. Wymienić rodzaje błędów występujących w obliczeniach numerycznych.
6. Podać metody rozwiązywania równań liniowych stosowanych w obliczeniach numerycznych.
7. Z jakiego szeregu korzystamy stosując metodę różnic skończonych? Podać przykład rozkładu funkcji $T(x,y)$ w ten szereg wokół punktu o indeksach (i,j) względem jednej ze zmiennych.
8. Wymienić warunki brzegowe występujące w obliczeniach wymiany ciepła i krótko je scharakteryzować.
9. Na czym polega metoda kolejnych przybliżeń.

6. Wymagania dotyczące wykonania sprawozdania

W sprawozdaniu zawrzeć opis wykonanych obliczeń, wyniki obliczeń w postaci dwuwymiarowej tabelki z naniesioną skalą kolorów oraz odpowiadające jej tabelki związane z policzeniem błędu bezwzględnego i względnego. Przykładowe obliczenia błędów. Wykres słupkowy porównujący niezbędną liczbę iteracji do uzyskania wyników dla MKP i metody nadrelaksacji dla różnych wartości ω .

We wnioskach odnieść się do uzyskanych wyników oraz wartości błędów. Porównać zastosowane metody.