



## *Pomiar dyfuzyjności cieplnej metodą chwilowego źródła ciepła.*

### **OPIS WYKONYWANIA ZADAŃ**

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie metodą chwilowego źródła ciepła dyfuzyjności cieplnej  $a$  wybranych materiałów izolacyjnych. Metoda ta pozwala również na wyznaczenie przewodności cieplnej  $\lambda$  oraz (przy znanej gęstości  $\rho$  badanego materiału) ciepła właściwego  $c_p$

#### **1. WSTĘP**

Dyfuzyjność cieplna  $a$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] jest zdefiniowana jako

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (1)$$

gdzie  $\lambda$  [ $\text{W}/\text{m}/\text{K}$ ] jest przewodnością cieplną,  $\rho$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] oznacza gęstość materiałową a  $c_p$  [ $\text{J}/\text{kg}/\text{K}$ ] jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu.

Wzór (1) wynika z równania nieustalonego przewodzenia ciepła zapisanego dla nieruchomego ciała stałego o stałej przewodności cieplnej  $\lambda$

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad}T), \quad (\lambda = \text{idem}) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \text{div} (\text{grad}T), \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (2)$$

Dyfuzyjność cieplna  $a$  charakteryzuje zdolność ciała do wyrównywania temperatury jeśli zostało ono poddane chwilowemu zaburzeniu cieplnemu.

Przewodność cieplna  $\lambda$  określa zdolność ciała do przewodzenia ciepła w warunkach ustalonej wymiany ciepła.

Tak więc dyfuzyjność cieplna, zwana też współczynnikiem wyrównywania temperatury jest odpowiednikiem przewodności cieplnej ciała w warunkach nieustalonej wymiany ciepła.

#### **2. FIZYCZNE PODSTAWY PRZEWODZENIA CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH.**

Przewodzenia ciepła w ciałach stałych ma miejsce tylko wtedy gdy temperatura rozpatrywanego ciała nie jest wyrównana. Wówczas zgodnie z prawem Fouriera, w pierwszym przybliżeniu, gęstość przewodzonego strumienia ciepła jest proporcjonalna do gradientu temperatury w kierunku prostopadłym do powierzchni izotermicznej, co zapisujemy

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (3)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $\lambda$  zwany współczynnikiem przewodzenia ciepła bądź przewodnością cieplną o wymiarze [ $\text{W}/\text{m}/\text{K}$ ] i zakresie od przykładowo 0,0028  $\text{W}/\text{m}/\text{K}$  dla węgliku tytanu aż do około 430  $\text{W}/\text{m}/\text{K}$  dla czystego srebra określa zdolność ciała do przewodzenia ciepła w warunkach ustalonej wymiany ciepła. W przypadku ceramiki tlenkowej KALOCER o gęstości  $\rho = 3600 \text{ kg}/\text{m}^3$  stosowanej

w urządzeniach, gdzie występują ekstremalne warunki ściernie i temperaturowe, jej przewodność cieplna zawiera się w granicach od 14 W/m/K do około 21 W/m/K.

Przewodzenie ciepła w ciałach stałych nie zachodzi w ten sposób, że energia wyprowadzona z jednej części ciała przemieszcza się prostoliniowo do innej części tego ciała, bo wówczas strumień przewodzonego ciepła  $q$  musiałby zależeć tylko od różnicy temperatury  $\Delta T$  między jego końcami i to bez względu na długość rozpatrywanego ciała. Skoro zaś strumień ciepła zależy od gradientu temperatury więc nośniki energii dyfundują przez to ciało ulegając po drodze licznym zderzeniom o charakterze przypadkowym, a to oznacza, że proces przewodzenia ciepła ma charakter stochastyczny.

Przewodzenie ciepła w metalach jest spowodowane głównie ruchem swobodnych elektronów, a w znacznie mniejszym stopniu drganiami sieci krystalicznej wokół położenia równowagi, których kwanty energii nazywamy fononami. W tym przypadku przewodność cieplną  $\lambda$  można traktować jako addytywną sumę jej składowej elektronowej  $\lambda_e$  oraz fononowej  $\lambda_f$

$$\lambda = \lambda_e + \lambda_f \quad (4)$$

Przewodność cieplna czystych metali zależy głównie od technologii ich otrzymywania (jak dużo znajduje się zanieczyszczeń) oraz od obróbki termicznej decydującej o strukturze metalu. Zależność przewodności cieplnej od temperatury w przypadku metali oraz ich stopów dana jest w postaci ogólnej [1]

$$\lambda = \lambda_e + \lambda_f = \left( \frac{T}{BT^m + C} \right) + \left( \frac{1}{DT + E} + FT \right) \quad (5)$$

Zależność (5) uwzględnia wyniki badań eksperymentalnych oraz badań teoretycznych tej grupy ciał, przy czym drugi nawias powyższego wyrażenia dotyczy fononowej składowej przewodności cieplnej i uwzględnia ograniczenia drogi swobodnej fononów w wyniku rozpraszania ich przez fonony, elektrony, defekty sieci krystalicznej i domieszki.

W przypadku półprzewodników o bardzo dużej oporności elektrycznej i dielektryków ich przewodność cieplna jest zdominowana przez mechanizm fononowy, gdzie przyjmuje się, że fonony zderzają się tak jak cząsteczki gazu doskonałego i wówczas ma zastosowanie elementarna teoria kinetyczna na podstawie której uzyskuje się

$$\lambda_f = \frac{1}{3} \rho c_v w l \quad (6)$$

gdzie  $l$  jest średnią drogą swobodną fononu,  $w$  oznacza prędkość fononów, czyli lokalną prędkość dźwięku,  $c_v$  jest ciepłem właściwym przy stałej objętości a  $\rho$  oznacza gęstość materiałową. Przykładowo dla kwarcu umieszczonego równoległe do osi optycznej znajdującego się w temperaturze 273,15 K po do wzoru (6) następujących wartości liczbowych [2]



$(\rho c_v) = 0,48 \cdot 4,19 \cdot 10^6 \text{ [J/m}^3\text{/K]} = 2,0112 \cdot 10^6 \text{ [J/m}^3\text{/K]}$ ,  $w = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ,  $l = 40 \text{ \AA}$

otrzymujemy

$$\lambda_f = \frac{1}{3} 2,0112 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-10} = 13,408 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (7)$$

Uzyskana wartość liczbową przewodności cieplnej kwarcu w temperaturze 273,15 K jest zgodna z wynikami pracy zamieszczonymi w [3]

### 3. OPIS METODY ODWROTNEJ WYZNACZANIA PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ DYFUZYJNOŚCI CIEPLNEJ I OBJĘTOŚCIOWEJ POJEMNOŚCI CIEPLNEJ

Przewodność cieplna  $\lambda$  często jest wyznaczana metodą stanu ustalonego w oparciu o aparat płytowy Poensgena bądź jego modyfikacje. Zasadniczą wadą tej metody jest stosunkowo długi czas, wynoszący kilka godzin, niezbędny do zapewnienia warunków ustalonej wymiany ciepła w badanej próbce. W proponowanej metodzie, należącej do grupy metod, znanych w literaturze pod nazwą "*pulse methods*" problem pomiaru dyfuzyjności cieplnej sprowadza się do wytworzenia chwilowego źródła ciepła na powierzchni próbki i rejestracji w czasie zmian nadwyżki temperatury na jej tylnej powierzchni. W tym celu przyjmuje się model nieustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku pół-nieskończonym postaci:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (8a)$$

$$T(x,0) = T_0 \quad (8b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_0 \delta(t-0) \quad (8c)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = T_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (8d)$$

gdzie  $\delta(t)$  [1/s] oznacza pseudo-funkcję delta Diraca,  $q_0$  [J/m<sup>2</sup>] oznacza gęstość powierzchniową energii impulsu cieplnego.

Do rozwiązania problemu początkowo-brzegowego (8) najwygodniej jest zastosować przekształcenie całkowite Laplace'a ze względu na pół-nieskończoność rozpatrywanego obszaru. Pamiętając, że

$$L \left[ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right] = s^1 \cdot \bar{T} - s^0 \cdot T(x,0+) = s\bar{T} - T_0 \quad (9a)$$

$$L\left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 \bar{T}(x,s)}{dx^2}, \quad L\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{d\bar{T}(x,s)}{dx}, \quad L[\delta(t)] = 1, \quad L[T_0] = \frac{T_0}{s} \quad (9b)$$

otrzymujemy

$$s\bar{T}(x,s) - T_0 = a \frac{d^2 \bar{T}(x,s)}{dx^2} \quad (10a)$$

$$\bar{T}(x,0) = T_0 / s \quad (10b)$$

$$-\lambda \frac{d\bar{T}(0,s)}{dx} = q_0 \quad (10c)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x,s) = T_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \bar{T}(x,s)}{\partial x} = 0 \quad (10d)$$

Rozwiązanie ogólne równania (10a) ma postać

$$\bar{T}(x,s) = T_0 / s + C_1 \exp(-\sqrt{(s/a)} \cdot x) + C_2 \exp(\sqrt{(s/a)} \cdot x) \quad (11)$$

z którego widać, że stała  $C_2 = 0$  ze względu na warunek (10d). Stałą  $C_1$  możemy wyznaczyć korzystając z warunku brzegowego (10c) co w rezultacie daje

$$-\lambda \cdot (-C_1 \sqrt{(s/a)} \exp(-\sqrt{(s/a)} \cdot 0)) = q_0 \Rightarrow C_1 = \frac{q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{s}} \quad (12)$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie w dziedzinie obrazu postaci

$$\bar{T}(x,s) = T_0 / s + \frac{q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{s}} \exp(-\sqrt{(s/a)} \cdot x) \quad (13)$$

Aby przejść do postaci rozwiązania w dziedzinie oryginału funkcji  $T(x, t)$  należy wykonać odwrotne przekształcenie Laplace'a. Korzystając z tablicy przekształceń Laplace'a zamieszczonej w [1] znajdujemy

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-A\sqrt{s})\right] (A \geq 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{A^2}{4t}\right) \quad (14)$$

Po wykonaniu podstawienia  $A = x \cdot a^{-1/2}$  w (14) uzyskujemy szukane rozwiązanie

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q_0 \sqrt{a}}{\lambda \sqrt{\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a \cdot t}\right) \quad (15)$$

Jeżeli pomiar temperatury odbywa się na powierzchni próbki, powiedzmy walcowej, o grubości  $h$  na jej tylnej powierzchni w jej osi symetrii to modelowa odpowiedź termiczna układu na wymuszenie impulsowe ma postać:

$$T(h, t) = T_0 + \frac{q_0 \sqrt{a}}{\lambda \sqrt{\pi \cdot t}} \exp\left(-\frac{h^2}{4a \cdot t}\right) \quad (16)$$

Funkcja  $T(h, t)$  zdefiniowana w (16) powinna przyjmować maksimum  $T_m$  dla pewnego czasu  $t = t_m$  ponieważ po początkowym wzroście temperatury próbki wynikającym z dostarczenia do niej ciepła musi nastąpić spadek jej wartości wynikający z zachodzenia procesu dochodzenia układu do stanu równowagi z otoczeniem (chłodzenie).

Przyrównując pierwszą pochodną funkcji (16) do zera otrzymujemy po prostych przekształceniach warunek

$$\frac{1}{2t_m} = \frac{h^2}{4at_m^2} \quad (17a)$$

skąd można wyznaczyć nieznaną dyfuzyjność cieplną  $a$  materiału próbki jako

$$a = \frac{h^2}{2t_m} \quad (17b)$$

Po podstawieniu teraz (17b) do (16) i przyjęciu oznaczenia

$$T_m = T(h, t_m) - T_0 \quad (18)$$

dostajemy poszukiwaną przewodność cieplną  $\lambda$  w postaci

$$\lambda = \frac{q_0 h}{\sqrt{2\pi \cdot \exp(1) \cdot t_m \cdot T_m}} \quad (19)$$

Mając wyznaczoną przewodność cieplną  $\lambda$  - (19) i dyfuzyjność cieplną  $a$  - (17b) można teraz wyznaczyć objętościową pojemność cieplną  $\rho \cdot c_p$  korzystając ze związku  $\lambda = \rho \cdot a \cdot c_p$ , co w rezultacie daje

$$\rho \cdot c_p = \frac{2q_0}{\sqrt{2\pi \cdot \exp(1) \cdot h \cdot T_m}} \quad (20)$$

Uwaga, we wzorach (19)-(20) gęstość powierzchniową energii impulsu  $q_0$  należy przyjąć równą

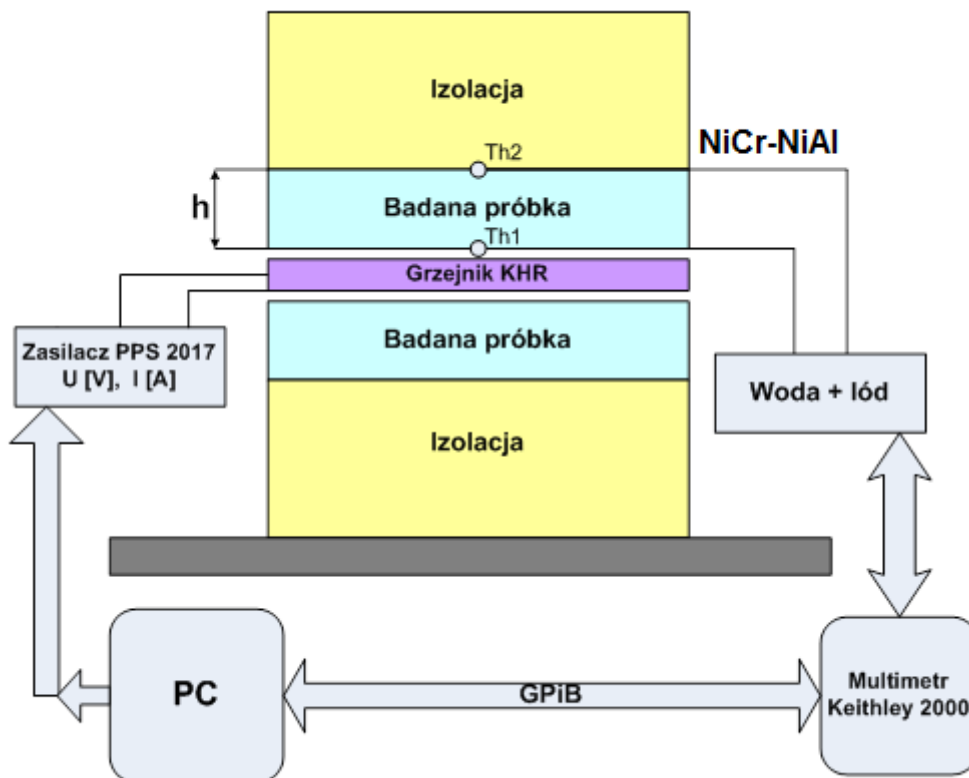
$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{U \cdot I \cdot t_0}{A} \quad (21)$$

gdzie  $A = \pi(\phi_g)^2/4$

## 4. OPIS ZASTOSOWANEGO DO BADAŃ UKŁADU POMIAROWEGO

Schemat układu pomiarowego przedstawia Rys. 1. Stos pomiarowy składa się z dwóch identycznych próbek w kształcie walca o średnicy  $\phi = 200$  mm i grubości  $h = 10$  mm położonych symetrycznie po obu stronach grzejnika cienkowarstwowego KHR 8/10 firmy OMEGA o grubości  $h_g = 0,2$  mm i efektywnej średnicy  $\phi_g = 192$  mm. Badane próbki obłożone są warstwą izolacji pełniącej zarazem rolę docisku w celu zapewnienia lepszego kontaktu cieplnego pomiędzy powierzchnią próbki i grzejnika. Pomiar

temperatury na powierzchni tylnej próbki dokonywany jest za pomocą termoelementu płaszczykowego typu K (chromel-alumel NiCr-NiAl) o średnicy zewnętrznej płaszcza  $\phi_t = 0,50$  mm poprowadzonym w cienkim rowku o grubości 0,5 mm wzdłuż średnicy, przy czym gorąca spoina znajduje się w osi symetrii próbki. Grzejnik KHR zasilany jest prądem stałym o zadanym napięciu  $U$  i czasie trwania  $t_0$  ze sterowanego za pomocą komputera PC zasilacza PPS 2017. Napięcie termoelektryczne pochodzące od termoelementu typu K którego zimne końce znajdują się w termosie zawierającym wodę będącą w równowadze termodynamicznej z lodem o temperaturze  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  jest mierzone automatycznie za pomocą multimetru Keithley 2000 sterowanego z komputera poprzez kartę GPIB. Wyniki pomiaru zapisywane są na dysku komputera w zbiorze o zadanej przez użytkownika nazwie.

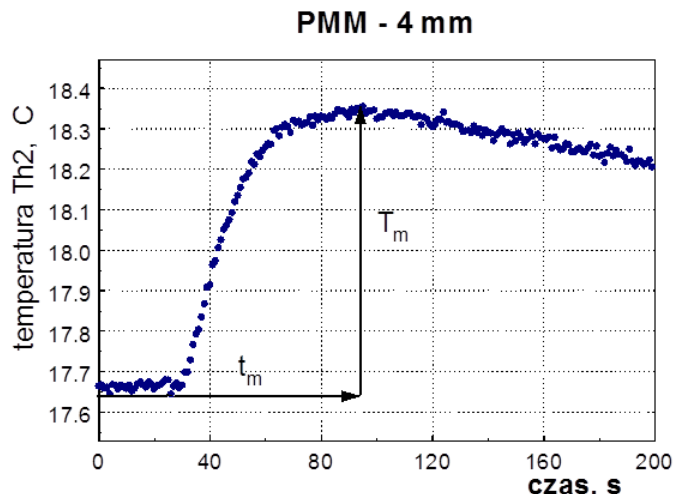


Rys.1. Schemat układu pomiarowego.

## 5. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Ustalić grubość próbki  $h$  [mm]
2. Uruchomić program 2000h.exe znajdujący się w  
D:\JANUSZ\_Z\2000h.exe
3. Wprowadzić następujące dane sterujące:  
- PODAJ LICZBE KANALOW (wprowadź 2)

- PODAJ LICZBE POMIAROW NA KANAL (wprowadź 1)
  - LICZBA CYKLI POMIAROWYCH (wprowadź 630)
  - LICZBA CYKLI NA ROZRUCH GRZEJNIKOW (podaj 30)
  - LICZBA CYKLI NA GRZANIE (wprowadź 5)
  - INTERWAL CZASOWY (wprowadź 1)
  - NAPIECIE NA LEWYM ZASILACZU (wprowadź 20)
  - NAPIECIE NA PRAWYM ZASILACZU (wprowadź 20)
  - PODAJ NAZWE PLIKU DO ZAPISU (wprowadź PMM01)
  - JEŚLI DOBRZE NACISNIJ E N T E R
4. Zapisać zbiór wyników na dyskietce 1,44 MB a następnie przenieść go na drugi komputer na którym będzie dokonywana dalsza jego obróbka.
5. Sporządzić wykres w układzie czas [s] - temperatura Th2 [ $^{\circ}\text{C}$ ] z którego należy odczytać czas  $t_m$  po jakim pojawiła się maksymalna nadwyżka temperatury  $T_m$  na tylnej powierzchni próbki i jej wartość w [ $^{\circ}\text{C}$ ].
- Uwaga! Czas  $t_m$  mierzymy od momentu włączenia grzejnika cienkowarstwowego KHR.
6. Korzystając ze wzorów (17b), (19) i (20) wyznaczyć odpowiednio:
- dyfuzyjność cieplną  $a$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] - (17b)
  - przewodność cieplną  $\lambda$  [ $\text{W}/\text{m}/\text{K}$ ] – (19)
  - ciepło właściwe  $c_p$  [ $\text{J}/\text{kg}/\text{K}$ ] – (20)
- wiedząc, że gęstość materiału badanej próbki  $\rho$  wynosi  $\rho = 1182$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]



Rys. 2. Przykładowy przebieg temperatury Th2 na tylnej powierzchni próbki uzyskany dla parametrów ( $U = 40$  [V],  $I = 0,086$  [A],  $t_0 = 8$  [s],  $h = 4$  [mm])



## L I T E R A T U R A

- [1] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła, PWN Warszawa 1979.
- [2] Kittel C.: Wstęp do fizyki ciała stałego, PWN Warszawa 1970.
- [3] Yoon Y., Car R., Srolovitz D.J., Scandolo S.: *Thermal conductivity of crystalline quartz from classical simulations*, PHYSICAL REVIEW B **70**, 012302 (2004).