WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
im. Jarosława Dąbrowskiego

Ćwiczenie rachunkowe

Ocena jakości układu regulacji automatycznej

Podstawy automatyki

ZAiUL WML WAT

Warszawa 2017

1 Cel ćwiczenia rachunkowego

Podczas ćwiczenia poruszane będą następujące zagadnienia:

- dokładność statyczna układów regulacji;
- dokładność dynamiczna układów regulacji (kryteria: odpowiedzi skokowej, całkowe, częstotliwościowe i miejsc geometrycznych pierwiastków).

Celem ćwiczenia jest zdobycie umiejętności praktycznej realizacji powyższych zagadnień.

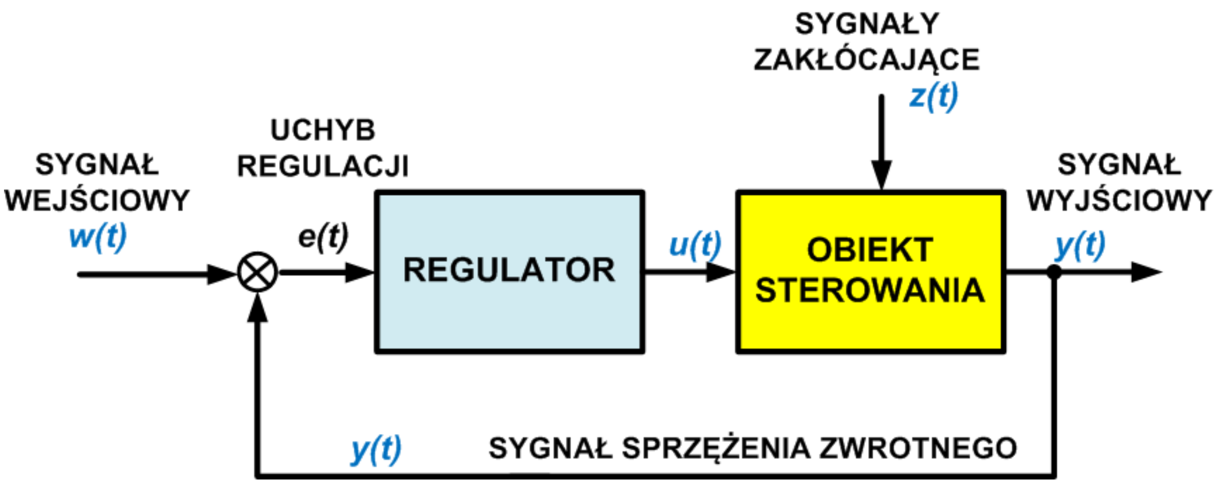
2 Wymagania wstępne

Przed rozpoczęciem ćwiczeń student zobowiązany jest do zapoznania się z treścią niniejszej instrukcji. W szczególności istotne jest posiadanie wiedzy teoretycznej z zakresu poruszanego podczas ćwiczenia rachunkowego. Ponadto student zobowiązany jest prześledzić ze zrozumieniem wszystkie zamieszczone przykłady, aby wiedzieć w jaki sposób rozpocząć rozwiązywanie zadań podczas ćwiczeń. W przypadku posiadania wątpliwości po zapoznaniu się z treścią instrukcji w celu ich wyjaśnienia zaleca się konsultacje się z prowadzącym przed terminem ćwiczeń rachunkowych.

3 Wiadomości ogólne

Podstawowym wymaganiem stawianym układowi regulacji (rys.1.) jest uzyskanie na jego wyjściu sygnału *y(t)* odpowiednio bliskiego przebiegowi wartości zadanej w(t), czyli minimalizacji sygnału uchybu *e(t)*:

$$e(t) = w(t) - y(t) \tag{1}$$



Rys.1. Schemat blokowy układu regulacji

Ocena jakości regulacji polega na analizie dwóch stanów układu regulacji:

- stanu przejściowego – dokładność dynamiczna;
- stanu ustalonego – dokładność statyczna

Dokładność dynamiczna określa zdolność układu do wiernego i szybkiego śledzenia zmiany wartości zadanej, a *dokładność statyczna* – zdolność układu do utrzymywania wartości regulowanej jak najbliżej wartości zadanej w stanie ustalonym, a więc po zakończeniu stanu przejściowego.

W przebiegu uchybu układu *e(t)*:

$$e(t) = e_u + e_d \tag{2}$$

można wydzielić dwie składowe:

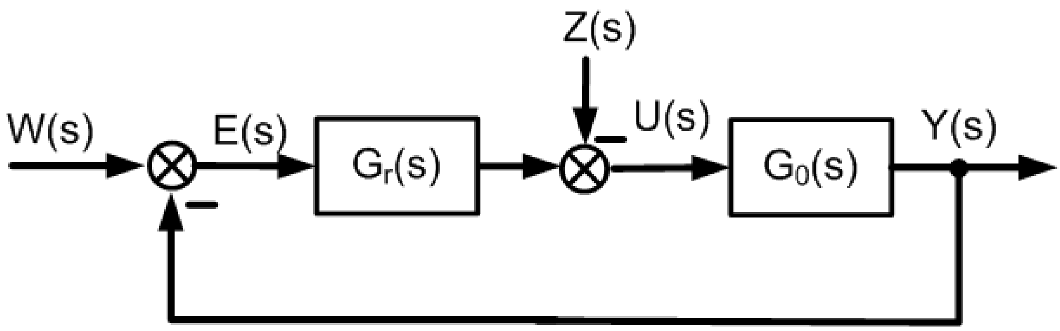
- *uchyb ustalony* e_u występujący wtedy, gdy w układzie dla $t \to \infty$, przy danym sygnale sterującym i danych sygnałach zakłócających. Przy wymuszeniu skokowym uchyb ustalony nosi nazwę *uchybu statycznego*;
- *uchyb dynamiczny* e_d występuje w stanie przejściowym i jest nazywany *uchybem dynamicznym* $e_d(t)$.

Uchyby ustalone i dynamiczne określają dokładność układu regulacji w stanie ustalonym i stanie przejściowym.

4 Dokładność statyczna

Miarą dokładności statycznej są uchyby ustalone, utrzymujące się po zaniku procesu przejściowego, wywołanego zmianą wartości zadanej *w(t)* lub zakłócenia *z(t)* (rys.2). Ocena dokładności statycznej układu sprowadza się do oceny uchybu w stanie ustalonym e_u:

$$e_u = \lim_{t \to \infty} e(t) \tag{3}$$



Rys.2. Schemat blokowy układu regulacji z zakłóceniem

Biorąc pod uwagę działanie sygnałów *z(t)* i *w(t)* (rys.2), uchyb regulacji *e(t)* można wyrazić także jako sumę dwóch składowych:

$$e(t) = e_z(t) + e_w(t) \tag{4}$$

gdzie:

$e_z(t)$ – składowa będąca wynikiem oddziaływania zakłóceń (uchyb zakłóceniowy);
$e_w(t)$ – składowa wywołana zmianą wartości zadanej na wejściu układu (uchyb nadążania).

Wśród liniowych układów regulacji można wyróżnić dwa typy układów:

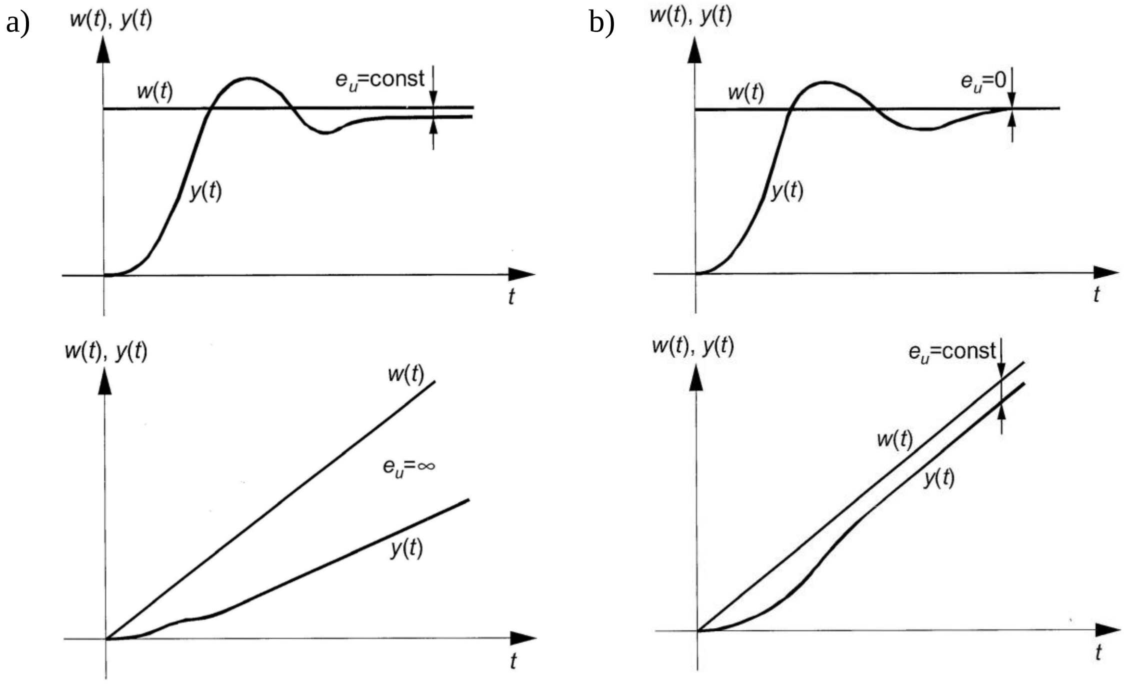
- układy, w których występują uchyby ustalone, proporcjonalne do wartości wymuszenia skokowego, nazywane *układami regulacji statycznej*:

$$G_{otw}(s)=\frac{L(s)}{M(s)} \tag{5}$$

- układy, w których uchyby ustalone przy stałym wymuszeniu są równe zero nazywamy *układami regulacji astatycznej*:

$$G_{otw}(s)=\frac{L(s)}{sM(s)} \tag{6}$$

Astatyzm układu względem sygnału zadającego lub względem zakłócenia może występować wtedy, gdy w tym układzie są elementy całkujące. Zależnie od usytuowania sposobu włączenia tych elementów, układ może być astatyczny względem jednych sygnałów, natomiast statyczny względem innych (rys.3).

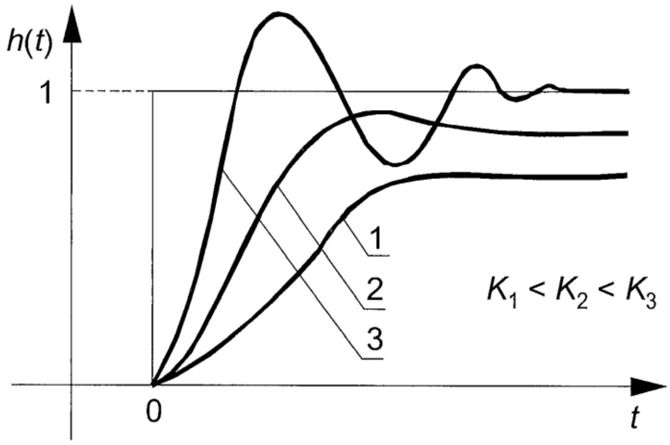


Rys.3. Przebiegi odpowiedzi układów regulacji na wymuszenie skokowe oraz liniowo narastające: a) układu statycznego b) układu astatycznego.

5 Dokładność dynamiczna

Dla zapewnienia określonych właściwości dynamicznych układu nie wystarcza wymaganie stabilności. Jeżeli układ jest stabilny, to wiemy jedynie, że przebiegi przejściowe w tym układzie zanikają. Nie znamy jednak istotnych z punktu widzenia regulacji parametrów układu. Są to m.in. rodzaj przebiegów, wartość odchyleń maksymalnych, czas zanikania przebiegów przejściowych (czas regulacji), pasmo częstotliwości, w którym zachodzi odtwarzanie sygnałów wymuszających z zadaną dokładnością, itp.

Z odpowiedzi układu z regulatorem proporcjonalnym na skokową zmianę wartości zadanej (rys.4) widać, że wzrost wzmocnienia regulatora zmniejsza wartość uchybu ustalonego, ale równocześnie powoduje, że przebieg sygnału wyjściowego coraz bardziej odbiega od przebiegu wartości zadanej. Powoduje to więc zmniejszenie dokładności dynamicznej. Jednocześnie ocena dokładności dynamicznej nie jest jednoznaczna. O ile bowiem uchyb ustalony łatwo zdefiniować i wyznaczyć jego wartość, o tyle dokładność dynamiczną można scharakteryzować za podstawie różnych kryteriów.



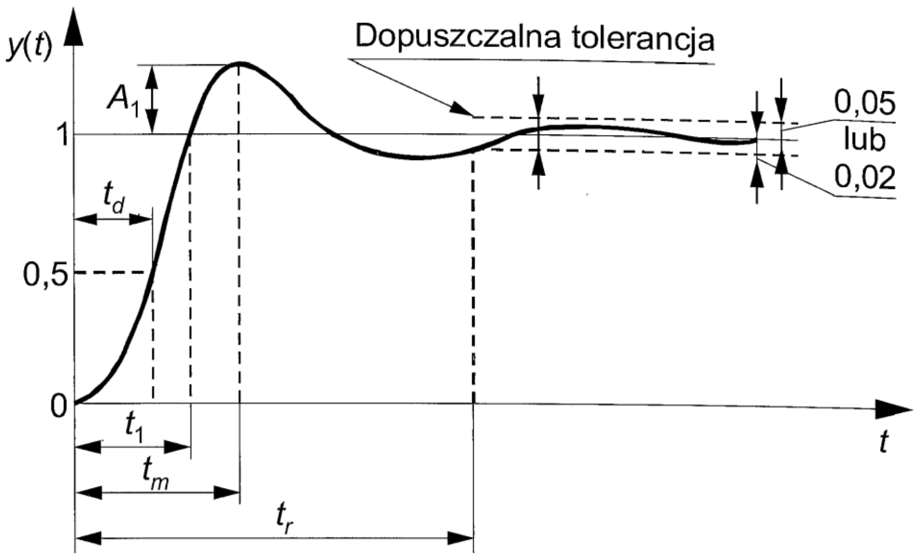
Rys.4. Odpowiedź skokowa dla różnych wzmocnień regulatora (K_1<K_2<K_3).

Kryteria te można podzielić na następujące grupy:

- ocena parametrów odpowiedzi skokowej;
- kryteria całkowe;
- kryteria częstotliwościowe;
- kryteria rozkładu pierwiastków.

5.1 Ocena parametrów odpowiedzi skokowej

Pierwszym kryterium oceny dynamicznej układów regulacji są parametry charakterystyki skokowej układu (rys.5).



Rys.5. Charakterystyka skokowa układu z zaznaczonymi wskaźnikami jakości regulacji.

Jakość regulacji określa się na podstawie następujących parametrów:

- czas t_d - czas potrzebny, aby odpowiedź po raz pierwszy osiągnęła połowę wartości ustalonej;
- czas narastania (czas wzrostu) t_1 - czas potrzebny, aby odpowiedź wzrosła od 10% do 90%, od 5% do 95% lub od 0 do 100% swojej wartości końcowej. Dla układów niedotłumionych drugiego lub wyższego rzędu normalnie wykorzystywany jest czas narastania od 0% do 100%. Dla układów przetłumionych (o odpowiedzi aperiodycznej) powszechnie wykorzystywany jest czas narastania od 10% do 90%.
- czas szczytowy t_m – czas potrzebny aby odpowiedź skokowa osiągnęła pierwszy szczyt przeregulowania;
- maksymalne przeregulowania A_1 - (w procentach) jest maksymalną wartością odpowiedzi, mierzoną od wartości ustalonej $y(\infty)$. Jest ono zdefiniowane następująco:

$$A_1 = \frac{y(t_m) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% \tag{7}$$

- czas regulacji t_r - czas potrzebny, aby krzywa odpowiedzi osiągnęła i pozostała w otoczeniu wartości ustalonej. Wartość tego czasu zwykle przyjmuje się jako 2% lub 5% wartości ustalonej. Czas regulacji jest związany z największą stałą czasową układu regulacji

Dla konkretnego układu można do oceny wybrać jeden lub kilka z wyżej wymienionych parametrów. Parametry te są bardzo ważne ze względu na to, ze większość układów regulacji jest badana w dziedzinie czasu. Układ regulacji musi być modyfikowany tak długo, aż parametry odpowiedzi skokowej nie osiągną założonych wartości.

5.2 Kryteria całkowe

W grupie kryteriów całkowych najczęściej stosowanymi są:

$$I_0 = \int_0^\infty |e_d(t)| dt \tag{8}$$

$$I_1 = \int_0^\infty e_d(t) dtt \tag{9}$$

$$I_{1k} = \int_0^\infty t^k e_d(t) dt \tag{10}$$

$$I_2 = \int_0^\infty e_d^2(t) dt \tag{11}$$

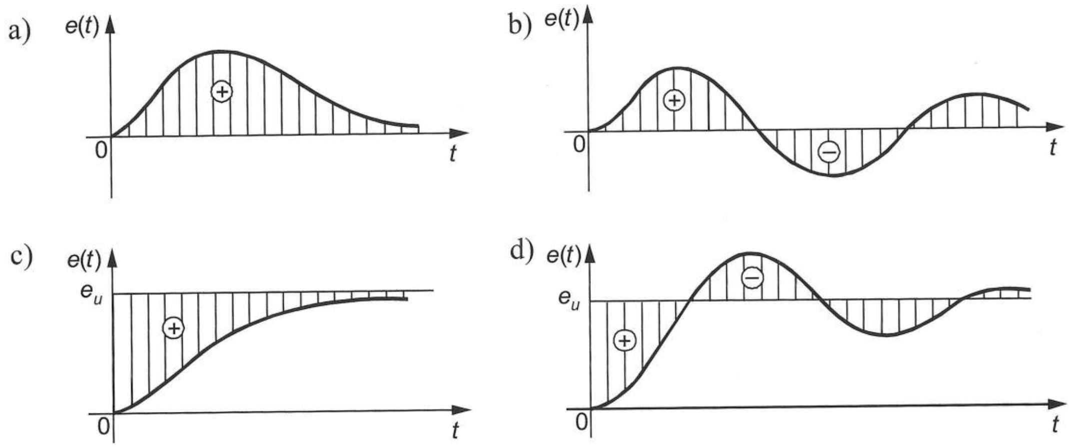
gdzie: e_d – uchyb przejściowy: $e_d(t) = e(t) - e_u \quad e_u = \lim_{t\to\infty} e(t)$

Za miarę jakości układu uważa się wartość całki I, tzn. im mniejsza jest ta wartość, tym wyższa jest jakość regulacji układu. W stabilnych układach regulacji uchyb przejściowy $e_d(t)$ dąży do zera dla czasu $t \to \infty$, dlatego dla czasu t_r przyjmuje się przedział $0<t<\infty$.

Całka I_1 (9) stanowi pole zawarte między krzywą uchybu regulacji $e(t)$, a asymptota, do której dąży ta krzywa. Całka ta może być stosowana wyłącznie dla przebiegów aperiodycznych. W przypadku gdy przebieg uchybu wskazuje przeregulowanie stosowane kryterium całki I_1 prowadzi do błędnych wyników.

Dla przebiegów oscylacyjnych stosuje się krytria I0 (8) i I2 (11), ponieważ wartości tych całek nie zależą od znaku funkcji $e_d(t)$ a jedynie od wartości bezwzględnej tej funkcji lub jej drugiej pochodnej.

Interpretację garficzną całek przedstawiono na rys.5.



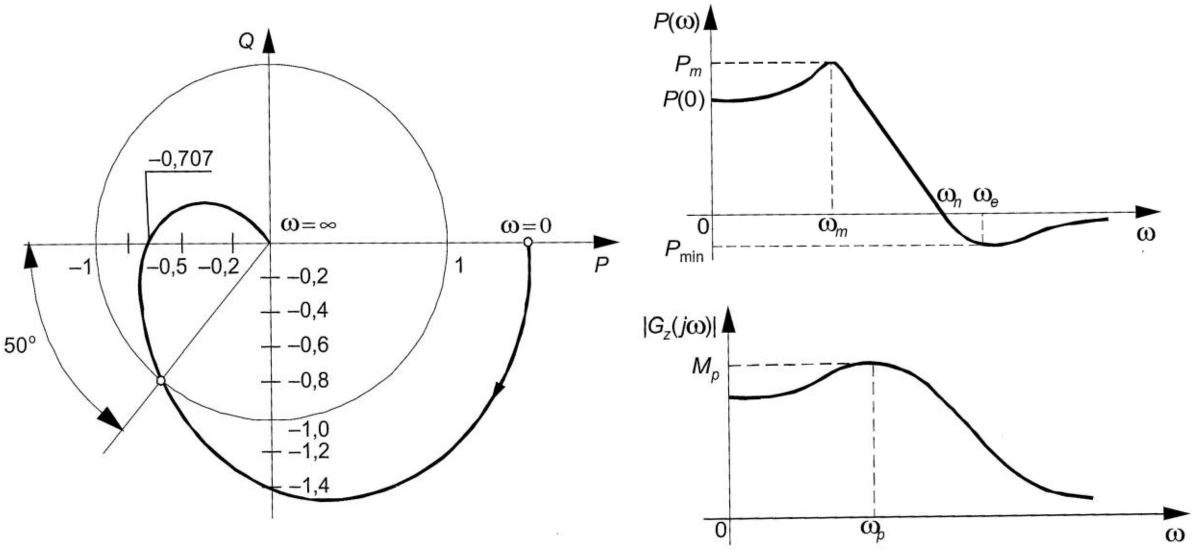
Rys.5. Interpretacja graficzna całkowych kryteriów jakości regulacji:
a) układ astatyczny – przebieg aperiodyczny; b) układ astatyczny – przebieg oscylacyjny;
c) układ statyczny – przebieg aperiodyczny; d) układ statyczny – przebieg oscylacyjny.

5.3 Kryteria częstotliwościowe

Na podstawie charakterystyk częstotliwościowych układu określane są:

- zapas stabilności (modułu i fazy);
- pulsacja odcięcia ω_n charakterystyki widmowej części rzeczywistej $P(\omega)$ transmitancji układu zamkniętego $G_z(j\omega)$, czyli pulsacja, przy której charakterystyka rzeczywista (lub styczna do niej, wystawiona w punkcie przegięcia części opadającej) przecina oś odciętych;
- maksymalna wartość modułu M_p transmitancji widmowej układu zamkniętego

Parametry pulsacji odcięcia i maksymalnego modułu transmitancji widmowej mają ścisły związek z przebiegiem odpowiedzi skokowej układu zamkniętego. Duże znaczenie ma także kształt przebiegu charakterystyki części rzeczywistej $P(\omega)$.



Rys.6. Kryteria częstotliwościowe układu regulacji automatycznej

Oceniane są również przenoszone pasmo, a więc zakres częstotliwości, w którym układ zamknięty przenosi sygnały zadane. Miarą pasma częstotliwości przenoszonych przez układ jest wartość graniczna ω_g, dla której logarytm modułu transmitancji widmowej zmniejsza się do wartości -3dB, czyli:

$$\left|G_z\left(j\omega_g\right)\right| = 0{,}707 \qquad (12)$$

5.4 Kryterium rozkładu pierwiastków (Metoda miejsc geometrycznych)

Transmitancję układu zamkniętego możemy określić jako stosunek wielomianów:

$$G_z(s) = \frac{d(s)}{c(s)} \qquad (13)$$

Jeżeli założymy, że d(s) i $c(s)$ nie mają wspólnego dzielnika, wtedy wartości s takie, że równanie charakterystyczne $c(s)=0$ będą reprezentować punkty, dla których $G_z(s)$ jest nieskończona.

Wartości s będziemy wówczas nazywać *biegunami funkcji* $G_z(s)$. Wartości s, dla których $d(s)=0$ są punktami, gdzie $G_z(s)$, są nazywane *zerami*.

Istnieje ścisła relacja pomiędzy wartościami własnymi (biegunami układu zamkniętego), a jakością regulacji. Dlatego podczas projektowania układu regulacji należy postępować w taki sposób, aby pewne nieznane parametry układu zostały ustalone w taki sposób, aby rozmieszczenie pierwiastków, a przez to zapewnić odpowiednią jakość regulacji. Najprostsza sytuacja zachodzi wówczas, gdy tylko jeden parametr układu regulacji jest nieznany. Jeżeli uważa się ten parametr za zmienną niezależną, to wszystkie pierwiastki stają się zmiennymi zależnymi od tego nieznanego parametru. Wtedy na płaszczyźnie zmiennych zespolonych (na płaszczyźnie s) pojawią się tzw. *krzywe pierwiastkowe*, po których poruszają się pierwiastki równania charakterystycznego w funkcji tego parametru. Taki zbiór punktów nazywa się *miejscem geometrycznym pierwiastków*.

Rozważmy układ, którego równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty albo pojedynczą parę pierwiastków zespolonych sprzężonych, na który działa wymuszenie impulsowe. Pytamy w jaki sposób zmienia się odpowiedź impulsowa, gdy zmienia się lokalizacja wartości własnych na płaszczyźnie *s*.

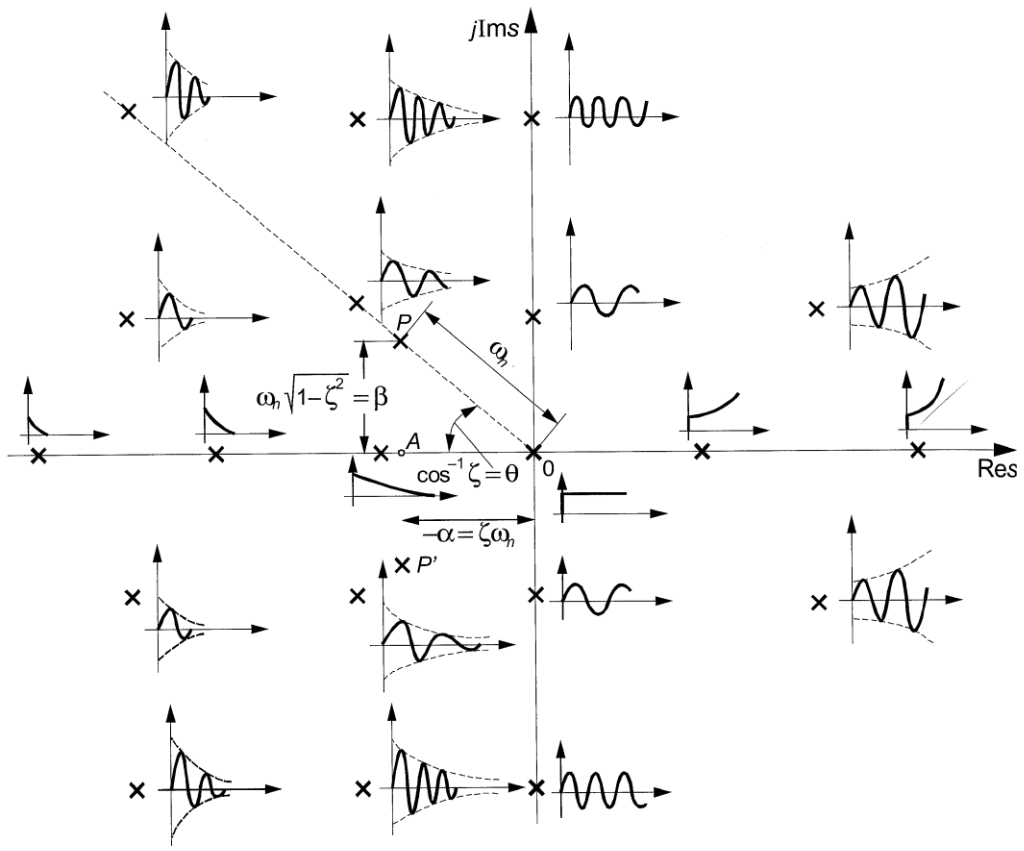
Jeżeli $G_z(s) = \dfrac{1}{s+\sigma}$ to odpowiedź impulsowa będzie funkcją wykładniczą: $g(t) = e^{-\sigma t} \cdot 1(t)$

.

Kiedy $\sigma>0$, bieguny położone są w płaszczyźnie, gdzie $s<0$ odpowiedź impulsowa jest stabilna.

Jeżeli $\sigma<0$, to bieguny położone są na prawo od początku układu współrzędnych, to odpowiedź impulsowa jest niestabilna.

Pierwiastki leżące najbliżej osi urojonej reprezentują składowe rozwiązania zanikające najwolniej, a więc determinujące szybkość działania układu. Oddalenie pierwiastków zespolonych sprzężonych od osi rzeczywistej decyduje o *częstotliwości drgań tłumionych* w odpowiedzi oscylacyjnej. Oddalenie pierwiastków od początku układu współrzędnych mówi o tzw. *częstotliwość drgań własnych układu* – parametrze nie ujawniającym się bezpośrednio w odpowiedzi skokowej.



Rys.7. Przebiegi przejściowe układu regulacji w zależności od położenia pierwiastka na płaszczyźnie *s*.

Analiza odpowiedzi impulsowych pozwala na wyznaczenie obszarów stabilności oraz stopni stabilności, na podstawie których określa się przybliżoną wartość czasu regulacji.

Przeregulowanie odpowiedzi skokowej jest determinowane stopniem oscylacyjności μ:

$$\mu = \max_k \frac{|\operatorname{Im} s_k|}{|\operatorname{Re} s_k|} \qquad \mu = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \tag{14}$$

Im wartość μ, tym mniejsze przeregulowanie A_1 i tym mniejsza liczba oscylacji w czasie t_r. Stopień oscylacyjności jest związany ze stosunkiem dwóch kolejnych przeregulowań zależnością:

$$e^{-\frac{\pi}{\mu}} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \tag{15}$$

6 Przykłady zadań rachunkowych

6.1 Przykład 1.

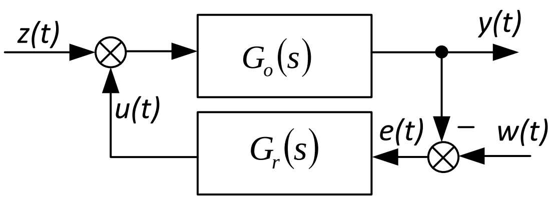
Wykorzystując twierdzenie o wartości końcowej znaleźć wartość funkcji f(t→∞) o transformacie $F(s) = \frac{4}{s(s^2+s+2)}$.

Twierdzenie o wartości końcowej mówi, że jeżeli funkcja wymierna *sF(s)* ma bieguny leżące wyłącznie w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej *s*, to: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

Stąd: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\frac{4}{s(s^2+s+2)} = 2$

6.2 Przykład 2.

W układzie regulacji stałowartościowej przedstawionej na rys.8 wartość wyjściowa sygnał sterowania w(t)=0, obiekt regulacji jest elementem inercyjnym, natomiast regulator jest proporcjonalny. Wyznaczyć przebieg przejściowy y(t) po skokowej zmianie wartości sygnału zakłócenia z o Δz. Przyjąć, że przed wystąpieniem skoku wartość sygnału wyjściowego y(t)=0.



Rys.8. Układ regulacji stałowartościowej.

Z treści zadania wiemy, że:

- transmitancja obiektu regulacji: $G_o(s) = \frac{k_o}{Ts+1}$;
- transmitancja regulatora: $G_r(s) = k_r$.

Stąd transmitancja układu regulacji wynosi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)G_r(s)} = \frac{\frac{k_o}{1+k_o k_r}}{\frac{T}{1+k_o k_r}s+1}$$

Transformata Y(s) może być wyznaczona z powyższego równania po podstawieniu Z(s)=ΔZ/s.

$$\frac{Y(s)}{\frac{\Delta Z(s)}{s}} = \frac{k_o}{Ts+1+k_o k_r} \Rightarrow Y(s) = \frac{\Delta Z(s)}{s}\frac{\frac{k_o}{1+k_o k_r}}{\frac{T}{1+k_o k_r}s+1}$$

Po zastosowaniu odwrotnego przekształcenia Lapalce'a uzyskujemy:

$$y(t) = \Delta Z \frac{k_o}{1+k_o k_r}\left[1-e^{-t/\frac{T}{1+k_o k_r}}\right]$$

Odchyłkę statyczną można wyznaczyć z twierdzenia o wartości końcowej:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\Delta Z\frac{k_o}{Ts+1}}{1+\frac{k_o k_p}{Ts+1}} = \frac{\Delta Z \cdot k_o}{1+k_o k_p}$$

6.3 Przykład 3.

Obiekt regulacji będący elementem całkującym z inercją współpracuje z regulatorem proporcjonalnym. Na układ taki oddziałuje zakłócenie z(t). Należy dobrać parametry regulatora, aby osiągnąć aperiodyczny przebieg regulacji o minimalnej całce składowej przejściowej uchybu.

Z treścią zadania wiemy, że:

$$G_o(s) = \frac{k_{ob}}{s(Ts+1)};\; G_r(s) = k_r$$

Transformata wielkości wyjściowej wynosi:

$$X_2(s) = \frac{Y(s)}{s} = \frac{k_{ob}}{s(Ts+1)+k_r}$$

Stąd równanie charakterystyczne ma postać:

$$s(Ts+1)+k_r=0 \Rightarrow Ts^2+s+k_r$$

Przebieg aperiodyczny występuje przy wzmocnieniu regulatora:

$$k_r<\frac{1}{k_{ob}T}$$

Całkę składowej przejściowej uchybu wyraża wzór:

$$I=\int_0^{\infty}[X_2(\infty)-X_2(t)]dt=\lim_{p\to 0}\left\{\frac{1}{s}\lim_{p\to 0}[sX_2(s)]-X_2(s)\right\}=$$

$$=\lim_{p\to 0}Y(s)\left[\frac{1}{k_r s}-\frac{1}{s\left[k_r+\frac{1}{k_{ob}}s(1+Ts)\right]}\right]=\lim_{p\to 0}Y(s)\left[\frac{k_r+\frac{1}{k_{ob}}s(1+Ts)-k_r}{k_r s\left[k_r+\frac{1}{k_{ob}}s(1+Ts)\right]}\right]=\frac{Y(s)}{k_{ob}k_r^2}$$

Wartość całki maleje ze wzrostem wzmocnienia regulatora kr. Dla maksymalnie dopuszczalnego wzmocnienia przy aperiodycznym przebiegu regulacji:

$$k_r=\frac{1}{k_{ob}T}$$

Stąd otrzymujemy minimalną całkę uchybu o wartości: $I=Y(s)k_{ob}16T^2$

Wzmocnienie regulatora należy więc nastawić na wartość: $k_r=\frac{1}{4k_{ob}T}$

7 Literatura

1. Janusz KOWAL *„Podstawy automatyki T1”*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004, Sygnatura: 60378
2. Tadeusz Kaczorek „*Teoria sterowania. Tom I Układy liniowe ciągłe i dyskretne”*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977