

**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
im. Jarosława Dąbrowskiego**



Ćwiczenie rachunkowe:

Stabilność liniowych układów automatyki

Podstawy automatyki



ZAiUL WML WAT

Warszawa 2017

1 Cel ćwiczenia rachunkowego

Podczas ćwiczenia poruszane będą następujące zagadnienia:

- metody sprawdzania i weryfikacji stabilności liniowych układów automatyki;
- kryteria stabilności: Hurwitza, Routha oraz Nyquista;

Celem ćwiczenia jest zdobycie umiejętności praktycznej realizacji powyższych zagadnień.

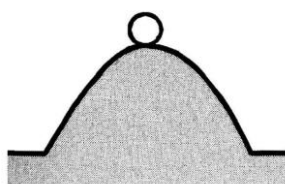
2 Wymagania wstępne

Przed rozpoczęciem ćwiczeń student zobowiązany jest do zapoznania się z treścią niniejszej instrukcji. W szczególności istotne jest posiadanie wiedzy teoretycznej z zakresu poruszanego podczas ćwiczenia rachunkowego. Ponadto student zobowiązany jest prześledzić ze zrozumieniem wszystkie zamieszczone przykłady, aby wiedzieć w jaki sposób rozpocząć rozwiązywanie zadań podczas ćwiczeń. W przypadku posiadania wątpliwości po zapoznaniu się z treścią instrukcji w celu ich wyjaśnienia zaleca się konsultacje się z prowadzącym przed terminem ćwiczeń rachunkowych.

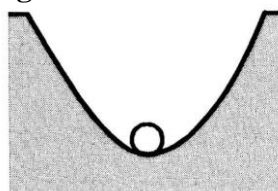
3 Wiadomości ogólne

Stabilność układu sterowania jest najważniejszą jego cechą charakteryzującą zdolność układu do wykonania zadań, dla których został on zbudowany. Stabilność jest pojęciem określającym – w potocznym znaczeniu – zdolność zachowania pewnego stanu. Rozpatrując zagadnienie stabilności, rozważania można rozpocząć od przykładu zachowania się kulki swobodnej przedstawionej na rys.1.

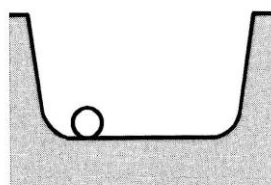
a) układ niestabilny



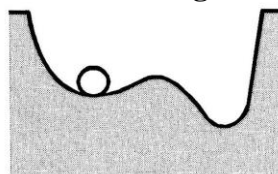
b) układ stabilny asymptotycznie i globalnie



c) układ stabilny nieasymptotycznie i globalnie



d) układ stabilny nieasymptotycznie i lokalnie - nieglobalnie



Rys.1. Ilustracja rodzajów stanu równowagi

Jeśli kulkę poddamy przesunięciu, można uznać, że pozycja równowagi, w jakiej znajduje się kulka odpowiednio w czterech stanach: a) niestabilnym, b) stabilnym asymptotycznie i globalnie, c) stabilnym nieasymptotycznie i globalnie, d) stabilnym nieasymptotycznie i lokalnie, ale nie globalnie.

Z przedstawionej analizy wynika, że stabilność jest cechą układu, polegającą na powracaniu do stanu równowagi stałej po zamknięciu zakłócenia, które wytrąciło układ z tego stanu.

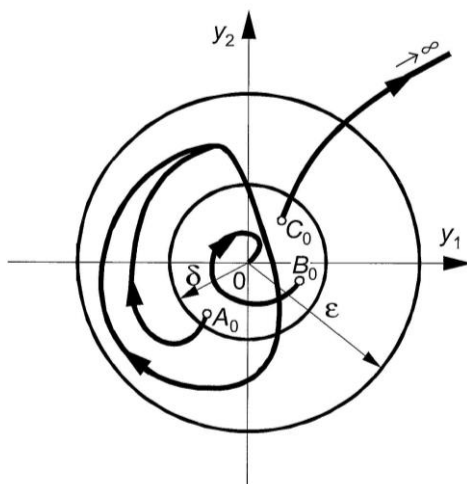
W zagadnieniach dotyczących stabilności układów sterowania przyjmiemy ogólniejsze podejście. Będziemy badać stabilność rozwiązań równań różniczkowych opisujących układ i śledzić jego zachowanie na podstawie przebiegu trajektorii w przestrzeni stanu (tzn. takiej, w której położenie punktu określone jest przez wszystkie współrzędne tej przestrzeni i jednoznacznie charakteryzuje stan dynamiczny układu), a w szczególności w przestrzeni fazowej.

Wyróżniamy dwa rodzaje stabilności:

- stabilność układu w stanie swobodnym, którą rozważamy w przypadku, gdy na układ nie działają sygnały zewnętrzne (zarówno sterujące, jak i zakłócające);
- stabilność układu poddanego działaniom zewnętrznym.

Jeżeli układ swobodny znajduje się w stanie równowagi, to odpowiadający temu punkt równowagi w przestrzeni fazowej umieszczamy w początku jej układu współrzędnych. Jest to dogodne przy badaniu procesu przejściowego przy $t > t_0$ na podstawie trajektorii, jaką punkt opisujący wychodzący z położenia początkowego $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ kreśli w n – wymiarowej przestrzeni fazowej, mianowicie:

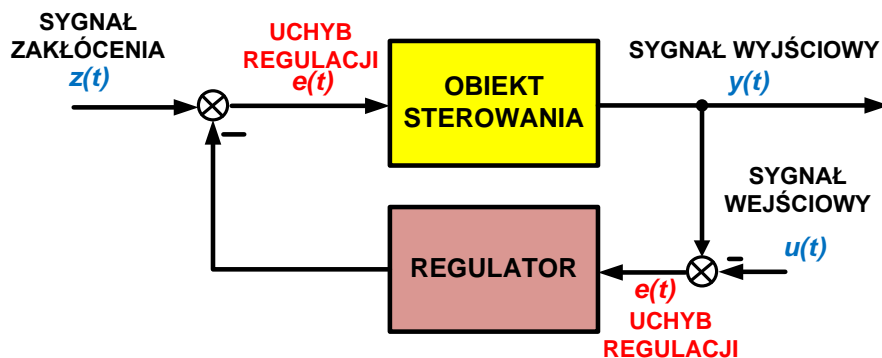
- jeżeli $t \rightarrow \infty$ trajektoria dąży do początku układu współrzędnych (punkt równowagi), to układ jest stabilny asymptotycznie – punkt B_0 na rys.2;
- jeżeli $t \rightarrow \infty$ trajektoria oddala się od początku układu współrzędnych (punkt równowagi), to układ jest niestabilny – punkt C_0 na rys.2;
- jeżeli $t \rightarrow \infty$ trajektoria nie wychodzi poza pewien ograniczony obszar otaczający początek układu współrzędnych, to układ jest stabilny w sensie Lapunowa – punkt A_0 na rys.2;



Rys.2. Schemat zamkniętego układu regulacji

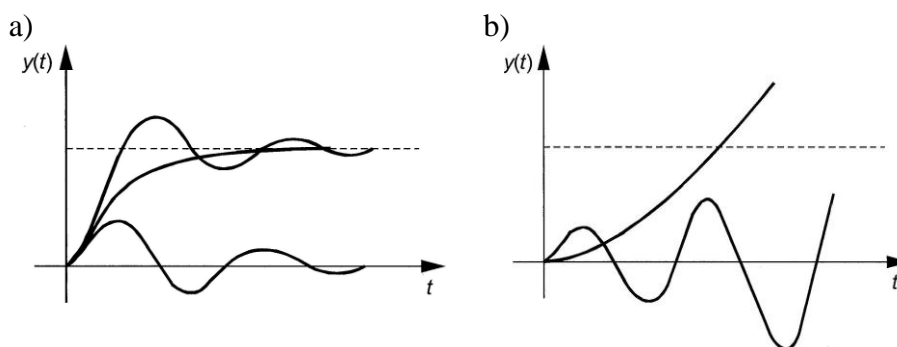
Punkt równowagi $x = 0$ nazywać będziemy stabilnym w sensie definicji Lapunowa, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę η (zależną na ogół od ε), że trajektoria rozpoczynająca się w punkcie A_0 , leżącym wewnątrz kuli o promieniu η , pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ε dla dowolnej chwili $t > 0$.

Natomiast w przypadku badania stabilności układu poddanego działaniom zewnętrznym, rozpatrzony zostanie układ sterowania przedstawiony na rys.3.



Rys.3. Schemat zamkniętego układu regulacji

Zamknięty układ liniowy, przedstawiony na rys.3, będziemy więc uważać za stabilny, jeżeli przy każdej skończonej wartości zakłócenia $z(t)$ i wartości zadanej $y_0(t)$ oraz dowolnych warunków początkowych sygnał wyjściowy $y(t)$ dążyć będzie do skończonej wartości ustalonej dla czasu t , dążącego do nieskończoności. Niekiedy precyzuje się dodatkowo, że gdy po zaniknięciu zakłócenia układ powraca do tego samego stanu równowagi co zajmowany poprzednio, to układ taki jest stabilny asymptotycznie. Przykłady przebiegów $y(t)$ występujących w układach stabilnych i niestabilnych pokazano na rys.4.



Rys.4. Charakterystyki czasowe: a) układów stabilnych, b) układów niestabilnych

Jeżeli układ zamknięty opisany jest za pomocą liniowego równania różniczkowego:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (1)$$

lub odpowiadającej mu transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2)$$

to czasowy przebieg sygnału wyjściowego $y(t)$ po dowolnym zakłóceniu o wartości skończonej opisany jest wzorem o następującej postaci:

$$y(t) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} \right) z_0 \quad (3)$$

gdzie: s_k – pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego;

z_0 – wartość zakłócenia.

Zakłócenie $z(t)$ może być wprowadzone w dowolnym miejscu układu, a w przypadku szczególnym zakłóceniem może być również zmiana wartości sygnału zadanego $y_0(t)$.

Koniecznym i dostatecznym warunkiem stabilności asymptotycznej układu jest, aby pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego miały ujemne części rzeczywiste, tzn. aby pierwiastki równania charakterystycznego leżały w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej, tzn.:

$$\operatorname{Re}(s_k) < 0 \quad (4)$$

Wówczas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_0 z_0 \quad (5)$$

gdzie: A_0 – współczynnik o wartości skończonej.

Tak więc, układ jest stabilny w podany sensie, a składowe wielkości wejściowej zanikają do zera przy $t \rightarrow \infty$, a pozostaje jedynie składowa ustalona, określona statycznymi własnościami układu.

W przypadku pierwiastków zespolonych:

$$s_k = \delta + j\omega \quad (6)$$

Odpowiednie wyrazy sumy (3) mają postać:

$$A_k e^{(\delta + j\omega)t} = A_k e^{\delta t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \quad (7)$$

Wyrazy te dążą do zera przy czasie $t \rightarrow \infty$, jeżeli spełniony jest warunek (4). Jeżeli chociaż jeden z pierwiastków równania charakterystycznego ma część rzeczywistą dodatnią:

$$\operatorname{Re}(s_k) > 0 \quad (8)$$

to:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad (9)$$

i układ jest stabilny.

Jeżeli równanie charakterystyczne układu ma pierwiastki wielokrotne, to w sumie (3) pojawiają się wyrazy typu:

$$\frac{A_{ki}}{(m_k - i)!} t^{m_k - i} e^{s_k t} \quad (10)$$

W tym przypadku warunek stabilności (4) pozostaje również ważny, gdyż funkcja $t^{m_k - i}$ rośnie wolniej niż funkcja wykładnicza – zatem dla $Re(s_k) < 0$, mamy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{A_{ki}}{(m_k - i)!} t^{m_k - i} e^{s_k t} \right] = 0 \quad (11)$$

Jeżeli równanie charakterystyczne układu ma pierwiastki w półpłaszczyźnie oraz jednokrotne na osi liczb urojonych, np. jeden pierwiastek zerowy lub parę pierwiastków urojonych sprzężonych, to w układzie będą występować drgania o stałej amplitudzie, określonej warunkami początkowymi. Układ jest wówczas na granicy stabilności, a ściśle mówiąc nie jest stabilny asymptotycznie. Jeżeli pierwiastki zerowe są wielokrotne, to przebieg $y(t)$ oddala się od początkowego stanu równowagi, a układ jest oczywiście niestabilny.

Warunek stabilności (4) będziemy więc uważać za ogólny warunek stabilności liniowych układów automatyki. Potrzeba ściślejszego rozróżniania rodzajów stabilności wystąpi w układach nieliniowych, natomiast tutaj stabilność będziemy rozumieć jako stabilność asymptotyczną.

Przy badaniu stabilności układów, których własności dynamiczne opisane są za pomocą równań różniczkowych wyższych rzędów (lub odpowiednich transmitancji), natrafia się na duże trudności przy obliczaniu pierwiastków równania charakterystycznego, gdyż jest to równanie algebraiczne tego samego stopnia, co rząd równania różniczkowego. Stosuje się wtedy jedno z kryteriów stabilności, tzn. twierzeń pozwalających ocenić stabilność układu na podstawie wartości współczynników równania charakterystycznego lub przebiegu charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego, bez obliczania pierwiastków równania (4). Należy jednak pamiętać, że wszystkie kryteria wywodzą się z warunku podstawowego (4).

O stabilności układu decyduje równanie charakterystyczne, tj. mianownik transmitancji badanego układu. Wynik stąd, że w układzie mają zanikać drgania swobodne opisane równaniem jednorodnym (prawa strona równania różniczkowego jest równa zero), które to równanie odpowiada mianownikowi transmitancji badanego układu. Dlatego też przy badaniu stabilności układów zajmujemy się tylko równaniem charakterystycznym tego układu.

Z wielu opracowanych kryteriów stabilności poznamy trzy podstawowe, które stosowane są najczęściej w praktyce inżynierskiej, a mianowicie:

- kryterium Hurwitza;
- kryterium Routha;
- kryterium Nyquista;

4 Kryteria stabilności

Kryteria stabilności są wprowadzane w celu uproszczenia projektantowi odpowiedzi na pytanie o stabilność stworzonego modelu matematycznego układu. Dzięki zastosowaniu odpowiednich kryteriów stabilności można na podstawie struktury i parametrów modelu stwierdzić, czy układ jest stabilny, bez konieczności rozwiązywania równań modelu lub wykonywania badań symulacyjnych.

4.1 Kryterium Hurwitza

Algebraiczne kryterium stabilności, oparte na badaniu współczynników równania charakterystycznego, udowodnione zostało przez Hurwitza w 1895r. Pozwala ono na sprawdzenie, czy równanie algebraiczne dowolnego stopnia ma wyłącznie pierwiastki ujemne lub o ujemnych częściach rzeczywistych.

Kryterium Hurwitza można stosować tylko wtedy, kiedy znany jest opis matematyczny badanego układu, a mianowicie jego równanie charakterystyczne. Jest ono bardzo proste i wygodne w zastosowaniu do układów opisanych równaniami niższych stopni. Za pomocą tego kryterium można sprawdzić stabilność układu o wszystkich współczynnikach równania charakterystycznego, jak i wyznaczyć zakresy (obszary) zmienności niektórych współczynników zapewniające stabilność. Wadą jest brak możliwości wyznaczania zapasu stabilności oraz utrudniona ocena wpływu poszczególnych parametrów układu na stabilność.

Warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym, żeby układ liniowy stacjonarny ciągły był stabilny asymptotycznie, jest aby wszystkie współczynniki równania charakterystycznego

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (12)$$

istniały i były większe od zera:

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest aby wszystkie podwyznaczniki główne (minory) wyznacznika Δ_n (wyznacznika Hurwitza) były większe od zera:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Jak wynika z zależności (14), wyznacznik Hurwitza tworzymy umieszczając na głównej przekątnej kolejne współczynniki wielomianu a_{n-1} do a_0 . Następnie w poszczególnych kolumnach wpisujemy powyżej wyrazu na przekątnej głównej wyznacznika współczynniki o indeksach kolejno zmniejszających się o jeden, a poniżej wyrazu na przekątnej głównej – współczynniki o indeksach kolejno zwiększających się o jeden.

Jeżeli któryś ze współczynników równania charakterystycznego jest ujemny lub równy zero, albo któryś z podwyznaczników jest ujemny lub równy zero, to układ jest niestabilny. W przypadku, gdy równanie (12) ma, min. pierwiastki czysto urojone i w przebiegu czasowym $y(t)$ występują drgania o stałej amplitudzie. Mówimy wówczas, że układ znajduje się na granicy stabilności (granica stabilności należy do obszaru niestabilnego).

Kryterium Hurwitza umożliwia stwierdzenie stabilności asymptotycznej, jak i nieasymptotycznej. Możliwość wystąpienia stabilności nieasymptotycznej zachodzi wtedy, kiedy w równaniu charakterystycznym współczynnik $a_0 = 0$. Po podzieleniu stron równania przez s , otrzymujemy równanie stopnia $n-1$, w odniesieniu do którego stosujemy kryterium Hurwitza.

4.2 Kryterium Routha

Drugim kryterium analitycznym, obok kryterium Hurwitza, jest kryterium Routha, które oprócz odpowiedzi na pytanie o stabilność asymptotyczną badanego modelu dostarcza informacji o liczbie pierwiastków równania charakterystycznego, znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Kryterium to określa liczbę pierwiastków wielomianu charakterystycznego w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego badanego układu będą znajdować się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, jeżeli zostaną spełnione następujące warunki:

- wszystkie współczynniki równania charakterystycznego $a_i, i=1, \dots, n$, są dodatnie. Jest to warunek konieczny;
- wszystkie współczynniki lewej skrajnej kolumny Routha są dodatnie.

Jeżeli układ jest niestabilny asymptotycznie, to współczynniki tej kolumny zmieniają znak. Wówczas liczba zmian znaku jest równa liczbie pierwiastków równania charakterystycznego znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Tablicę Routha buduje się według następującego schematu:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & \\
 c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & & \\
 d_1 & d_2 & \cdots & & & \\
 e_1 & & & & &
 \end{array} \tag{15}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \dots \\
 c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{-b_1}, \dots \\
 d_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}, d_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{-c_1}, \dots \\
 e_1 &= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{-d_1}, \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

Z każdym wierszem tablicy Routha można skojarzyć wielomian pomocniczy, który będzie wykorzystywany w przypadku szczególnym, czyli wtedy, kiedy wiersz współczynników okaże się składać z samych zer.

Wtedy wiersz składający się z zer zastępuje się współczynnikami pochodnej wielomianu pomocniczego z poprzedniego wiersza. Wielomian ten buduje się, sumując odpowiednie iloczyny współczynników z tablicy Routha ze zmienną s w potęgach wynikających z konstrukcji stowarzyszonej z nią tabeli wielomianowej. Drugą sytuacją wyjątkową jest sytuacja, kiedy element w lewej skrajnej kolumnie tablicy Routha równa się zero. Wtedy badane równanie charakterystyczne należy pomnożyć przez czynnik $(s+a)$ i rozpocząć badanie stabilności tak otrzymanego równania za pomocą kryterium Routha od początku. Liczba $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.

4.3 Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala badać stabilność układu zamkniętego na podstawie przebiegu charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego, którą można wyznaczyć zarówno analitycznie, jak i doświadczalnie.

Rozpatrzmy układ liniowy o schemacie blokowym przedstawionym na rys.5. Transmitancja układu otwartego $G_o(s)$ jest równa:

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s) \tag{18}$$

Przedstawiając tę transmitancję w postaci ilorazu wielomianów otrzymamy:

$$G_o(s) = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \tag{19}$$

przy czym $N_o(s) = 0$ jest równaniem charakterystycznym układu otwartego.

Transmitancja układu zamkniętego $G_z(s)$ jest równa:

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{M_z(s)}{N_z(s)} \tag{20}$$

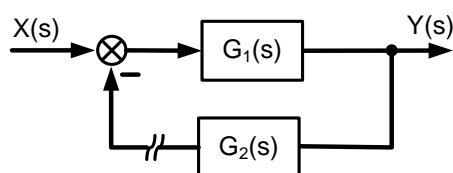
przy czym $N_z(s) = 1 + G_o(s) = 0$ jest równaniem charakterystycznym układu zamkniętego.

Przedstawiając równanie charakterystyczne układu zamkniętego w postaci widmowej $N(j\omega) = N(s)$ dla $s = j\omega$ otrzymamy:

$$N(j\omega) = 1 + G_0(s)_{s=j\omega} = 1 + G_o(j\omega) \quad (21)$$

gdzie: $G_o(j\omega)$ jest charakterystyką częstotliwościową układu otwartego

Stabilność układu zamkniętego zależy od jego równania charakterystycznego $N(s) = 0$. Z równania (21) wynika, że można ją ocenić na podstawie charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego $G_o(j\omega)$.



Rys.5. Schemat blokowy układu

Kryterium Nyquista można sformułować następująco:

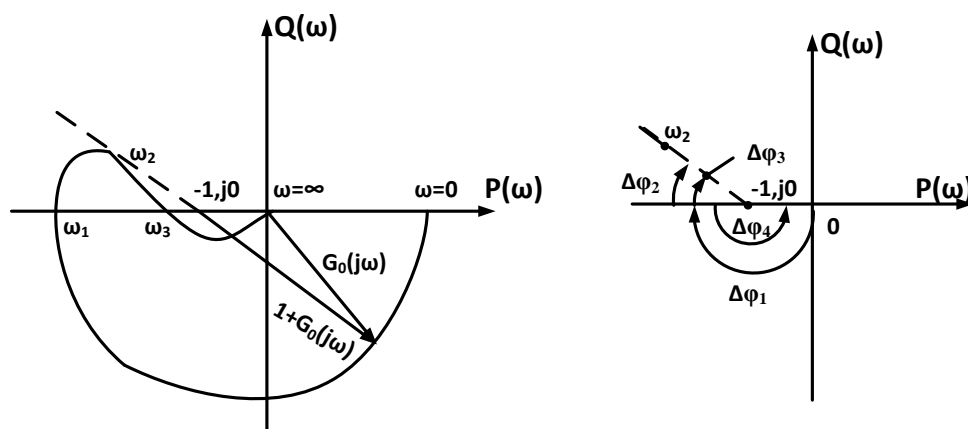
Układ zamknięty jest stabilny, jeżeli przyrost argumentu wyrażenia (wektora) $1 + G_o(j\omega)$ przy zmianie pulsacji ω od 0 do ∞ jest równy $k\pi$, gdzie k jest ilością pierwiastków równania charakterystycznego układu otwartego, o części rzeczywistej dodatniej, czyli:

$$\Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)] = k\pi \quad (22)$$

Przyrost argumentu wektora należy rozumieć jako obrotu tego wektora, przy zmianie pulsacji ω w określonym zakresie.

Zwróćmy uwagę, jeżeli $k \neq 0$, to układ otwarty jest niestabilny, ponieważ posiada pierwiastki równania charakterystycznego o części rzeczywistej dodatniej. Stąd wynika, że istnieją układy zamknięte stabilne, pomimo że układ otwarty jest niestabilny.

Sposób obliczania przyrostu argumentu $\Delta\varphi$ wektora $1 + G_o(j\omega)$ pokazano na rys.6.



Rys.6. Sposób obliczania przyrostu argumentu $\Delta\varphi$ wektora $1 + G_o(j\omega)$

$$\Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)] = \Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{0 < \omega < \infty} = \Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{0 < \omega < \omega_1} + \Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{\omega_1 < \omega < \omega_2} + \Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{\omega_2 < \omega < \omega_3} + \Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{\omega_3 < \omega < \infty} \quad (23)$$

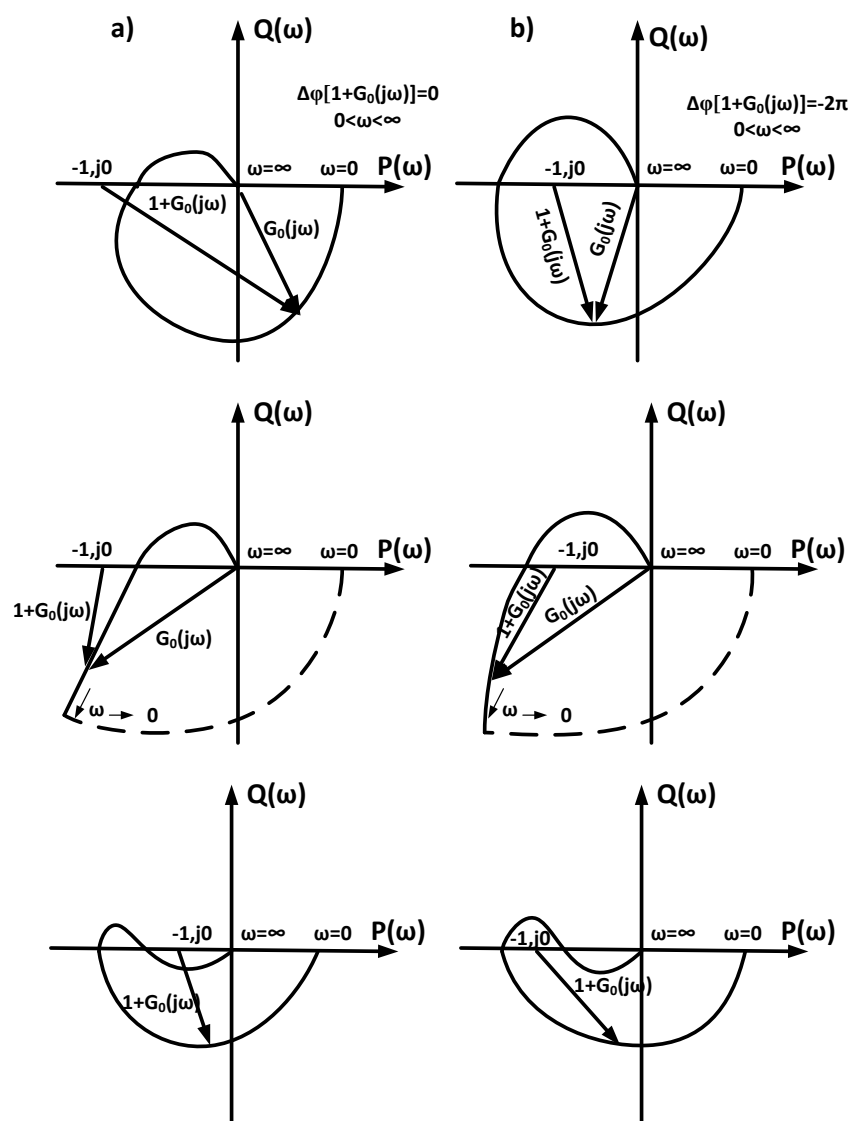
$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4 = -\pi - \alpha + \alpha + \pi = 0$$

Wzór (23) wynika ze stwierdzenia, że przyrost argumentu $\Delta\varphi$ wektora $1+G_o(j\omega)$ rozumiany jest jako kąt obrotu tego wektora przy zmianie ω od 0 do ∞ , którą to zmianę możemy rozbić na kolejne etapy ($\omega = 0$ do $\omega = \omega_1$; $\omega = \omega_1$ do $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega_2$ do $\omega = \omega_3$; $\omega = \omega_3$ do $\omega = \infty$, itd.)

Rozpatrzmy obecnie przypadek najczęściej występujący $k = 0$, tzn. że układ otwarty jest stabilny. Z podanego powyżej kryterium wynika, że układ otwarty jest stabilny. Z podanego powyżej kryterium wynika, że układ zamknięty też jest stabilny, jeżeli:

$$\Delta\varphi [1 + G_o(j\omega)]_{0 < \omega < \infty} = 0 \quad (24)$$

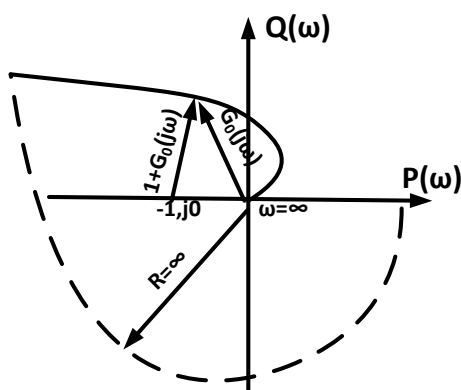
Przykład przebiegu charakterystyk amplitudowo – fazowych $G_o(j\omega)$ układu otwartych stabilnych, które po zamknięciu będą: a) stabilne, b) niestabilne (rys.7).



Rys.7. Przykład przebiegu charakterystyk amplitudowo – fazowych $G_o(j\omega)$ układu otwartych stabilnych, które po zamknięciu będą: a) stabilne, b) niestabilne

Gdy w układzie otwartym występuje jeden lub więcej elementów całkujących, charakterystyka $G_o(j\omega)$ zaczyna się w nieskończoności (dla $\omega = 0$). Należy wtedy charakterystykę tę uzupełnić częścią okręgu o promieniu równym nieskończoności $R = \infty$ przez tyle ćwiartek, ile występuje elementów całkujących. Na rys.7 trzeci przypadek odpowiada układowi otwartemu, w którym występuje jeden element całkujący, dlatego został uzupełniony częścią okręgu narysowaną linią przerywaną.

Rozpatrzmy układ otwarty stabilny, w którym występują dwa elementy całkujące, wtedy przebieg charakterystyki $G_o(j\omega)$ jest zgodny z rys.8. Charakterystykę tę należy uzupełnić półokręgiem o promieniu $R = \infty$.



Rys.8. Charakterystyka $G_o(j\omega)$ układu otwartego z dwoma elementami całkującymi

Z rysunku tego wynika, że taki układ po zamknięciu będzie zawsze niestabilny (układ niestabilny strukturalnie), ponieważ punkt $(-1, j0)$ leży po prawej stronie charakterystyki $G_o(j\omega)$.

Kryterium to jest proste w praktycznym zastosowaniu, gdy znamy charakterystykę amplitudowo – fazową $G_o(j\omega)$ oraz wiemy, że układ otwarty jest stabilny, otrzymamy analizując stabilność elementów (podzespołów) wchodzących w skład układu otwartego. Jeżeli stwierdzimy, że wszystkie elementy składowe są stabilne, to układ otwarty też jest stabilny. W celu udowodnienia powyższego stwierdzenia przyjmiemy, że układ otwarty składa się z dwóch elementów o transmitancji $G_1(s)$ i $G_2(s)$ – rys.5.

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{M_1(s) M_2(s)}{N_1(s) N_2(s)} = \frac{M_o(s)}{N_o(s)} \quad (25)$$

gdzie: $G_1(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)}$; $G_2(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)}$

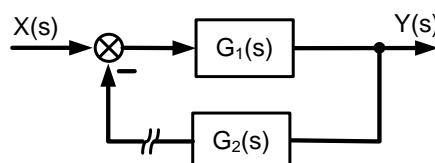
Stąd $N_o(s) = N_1(s)N_2(s)$ oznacza wielomian charakterystyczny układu otwartego równy iloczynowi wielomianów charakterystycznych elementów składowych. Zatem pierwiastkami równania charakterystycznego układu otwartego są pierwiastki równań charakterystycznych elementów składowych. Powyższe rozumowanie można rozszerzyć na dowolną ilość elementów składowych.

5 Przykłady zadań rachunkowych

5.1 Przykład 1.

Zbadać stabilność układu otwartego i zamkniętego o schemacie blokowym (rys.9), gdzie $G_1(s)$ oznacza transmitancję regulatora PD. W tym celu należy skorzystać z kryterium Hurwitza

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 2}; \quad G_2(s) = 2(s+1)$$



Rys.9. Charakterystyka $G_o(j\omega)$ układu otwartego z dwoma elementami całkującymi

I. Transmitancja układu otwartego $G_o(s)$ jest równa:

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{2(s+1)^2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

stąd równanie charakterystyczne układu otwartego $G_o(s)$ ma postać:

$$N_o(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 2 = 0$$

1) warunek konieczny jest spełniony, ponieważ $a_4 > 0$, $a_3 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$.

Wyznacznik Hurwitza układu otwartego ma postać:

$$\Delta_4(s) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2) warunek wystarczający wymaga sprawdzenia znaku podwyznaczników Δ_2 i Δ_3 :

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 + 5 = -3 > 0$$

Układ otwarty jest niestabilny, ponieważ $\Delta_3 < 0$.

II. Transmitancja układu zamkniętego $G_2(s)$ jest równa:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1+G_0} = \frac{\frac{s+1}{s^4+2s^3+3s^2+s+2}}{1+\frac{2(s+1)^2}{s^4+2s^3+3s^2+s+2}} = \frac{s+1}{s^4+2s^3+5s^2+5s+4}$$

stąd równanie charakterystyczne układu zamkniętego $N(s)$ ma postać:

$$N(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 5s + 4 = 0$$

1) Warunek konieczny spełniony.

Wyznacznik Hurwitza Δ_4 ma postać:

$$\Delta_4(s) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2) Warunek wystarczający wymaga sprawdzenia znaku podwyznaczników Δ_2 i Δ_3 :

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 5 = 5 > 0$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -16 + 25 = 9 > 0$$

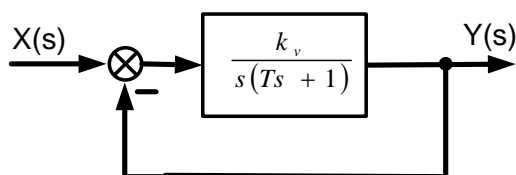
Układ zamknięty jest stabilny.

Mamy tu do czynienia z przypadkiem, kiedy niestabilny układ otwarty po zamknięciu staje się układem stabilnym.

5.2 Przykład 2

Określić stabilność z wykorzystaniem kryterium Nyquista układu zamkniętego o schemacie blokowym przedstawionym na rys.10, gdzie w torze głównym występuje element całkujący rzeczywisty o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k_v}{s(Ts+1)}$$



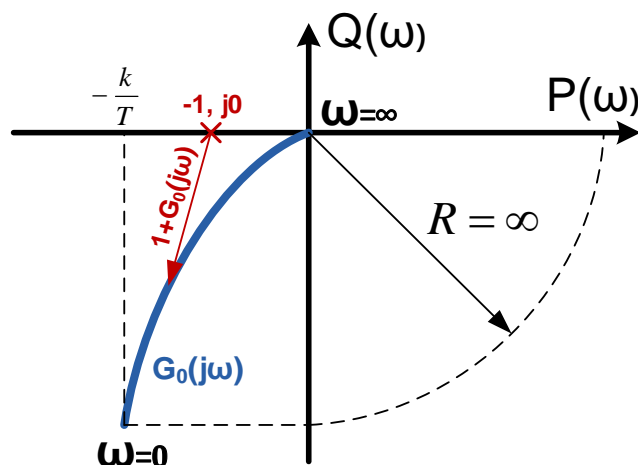
Rys.10. Schemat blokowy układu

W analizowanym przykładzie transmitancja układu otwartego jest równa transmitancji $G_I(s)$.

Charakterystyka amplitudowo – fazowa układu otwartego $G_o(j\omega)$ przedstawiona jest na rys.11.

Układ otwarty jest stabilny dla $T > 0$, gdyż element całkujący rzeczywisty jest stabilny (nieasymptotycznie). Posiada bowiem pierwiastki równania charakterystycznego $s_1 = 0, s_2 = -1/T$.

Ponieważ w układzie otwartym występuje element całkujący, charakterystykę uzupełniamy częścią okręgu $R = \infty$ (linia przerywana na rys.11). Z rysunku tego wynika również, że układ zamknięty będzie zawsze stabilny, niezależnie od wartości k_v i dla $T > 0$, ponieważ punkt $(-1, j0)$ leży zawsze po lewej stronie charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego $G_o(j\omega)$.



Rys.11. Charakterystyka amplitudowo – fazowa układu otwartego o transmitancji $G_1(s) = \frac{k_v}{s(Ts+1)}$

5.3 Przykład 3

Zbadać stabilność systemu opisanego przez wielomian charakterystyczny $M(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 1$. W tym celu należy wykorzystać kryterium Routha.

W tym celu budujemy tablice Routha zgodnie z zależnością (15). Wówczas otrzymamy:

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & -1 & 1 & 0 \\ s^1 & 3 & 0 & \\ s^0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Ponieważ w pierwszej kolumnie występuje podwójna zmiana znaku, wielomian $M(s)$ ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zespolonej s .

5.4 Przykład 4

Zbadać stabilność systemu opisanego przez wielomian charakterystyczny $M(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 2$. W tym celu należy wykorzystać kryterium Routha.

W tym celu budujemy tablice Routha zgodnie z zależnością (15). Wówczas otrzymamy:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 2 & 0 \\ s^1 & \infty & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Ponieważ trzeci element pierwszej kolumny jest zerem, tablica nie może być uzupełniona. Po pomnożeniu wielomianu $M(s)$ przez $(s+1)$ otrzymuje się wielomian $M_I(s) = (s+1)M(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 2$, dla którego tablica Routha ma postać:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 4 \\ s^4 & 2 & 4 & 2 \\ s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & -2 & 2 & \\ s^1 & 4 & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

Ponieważ w pierwszej kolumnie występuje podwójna zmiana znaku, wielomian $M_I(s)$ (czyli również wielomian $M(s)$) ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

6 6. Literatura

1. Zbigniew WAŁACH „Cybernetyka techniczna. Część I – Eksploatacja osprzętu”, Wydział Wydawniczy WAT, Warszawa 1983
2. Janusz KOWAL „Podstawy automatyki. T1”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004, Sygnatura: 60378
3. Tadeusz Kaczorek „Teoria sterowania. Tom I Układy liniowe ciągłe i dyskretne”. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977.
4. Dariusz Horla „Podstawy automatyki. Ćwiczenia rachunkowe. Część I”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2003.
5. Władysław Pełczewski „Teoria sterowania. Ciągłe stacjonarne układy liniowe” Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1980, Sygnatura: II – 65523.