

**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
im. Jarosława Dąbrowskiego**



Ćwiczenie rachunkowe:

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe układów automatyki

Podstawy automatyki



ZAiUL WML WAT

Warszawa 2017

1 Cel ćwiczenia rachunkowego

Podczas ćwiczenia poruszane będą następujące zagadnienia:

- obliczanie odpowiedzi impulsowej i skokowej układu;
- wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowo-fazowej oraz logarytmicznej: modułu i fazy) układu.

Celem ćwiczenia jest zdobycie umiejętności praktycznej realizacji powyższych zagadnień.

2 Wymagania wstępne

Przed rozpoczęciem ćwiczeń student zobowiązany jest do zapoznania się z treścią niniejszej instrukcji. W szczególności istotne jest posiadanie wiedzy teoretycznej z zakresu poruszanego podczas ćwiczenia rachunkowego. Ponadto student zobowiązany jest prześledzić ze zrozumieniem wszystkie zamieszczone przykłady, aby wiedzieć w jaki sposób rozpocząć rozwiązywanie zadań podczas ćwiczeń. W przypadku posiadania wątpliwości po zapoznaniu się z treścią instrukcji w celu ich wyjaśnienia zaleca się konsultacje się z prowadzącym przed terminem ćwiczeń rachunkowych.

3 Obliczanie odpowiedzi impulsowej i skokowej

Analizując i projektując układy sterowania, musimy mieć możliwość porównywania ich właściwości. W tym celu stosuje się określone testowe sygnały wejściowe, umożliwiające porównywanie odpowiedzi badanych układów na te sygnały. Wiele metod projektowania oparto na takich sygnałach lub na odpowiedziach układów na zmiany warunków początkowych bez żadnych sygnałów testowych). Wykorzystanie sygnałów testowych wynika z tego, że istnieje korelacja pomiędzy odpowiedziami układu na typowy sygnał wejściowy, a zdolnością układu do radzenia sobie z rzeczywistymi sygnałami wejściowymi. Powszechnie wykorzystywanymi testowymi sygnałami wejściowymi są funkcje: skokowa, liniowa, impulsowa, sinusoidalna, itp. Dla tych sygnałów można łatwo przeprowadzić analizę matematyczną i eksperymentalną układów sterowania, ponieważ sygnały te są bardzo prostymi funkcjami do wygenerowania.

Ponadto przekształcenie Laplace'a umożliwia wyznaczenie transmitancji operatorowej liniowego układu, która również określa własności dynamiczne układu (model) niezależnie od rodzaju sygnału wejściowego. Transmitancja operatorowa jest bardzo wygodna dla analizy pracy liniowych układów i dlatego jest powszechnie stosowana. Umożliwia ona również przedstawienie zasadniczych cech układów w postaci graficznej, pozwalającej na pierwszy rzut oka ocenić właściwości dynamiczne. Biorąc pod uwagę dziedzinę, w jakiej przedstawia się te właściwości, można wyróżnić:

- charakterystyki czasowe;
- charakterystyki częstotliwościowe.

Charakterystyki czasowe dają możliwość (w odniesieniu do układów jednowymiarowych) bezpośredniej oceny układu, ponieważ charakterystyka czasowa jest przebiegiem w czasie odpowiedzi układu dynamicznego $y(t)$ na określone wymuszenie $x(t)$.

Najczęściej stosowanymi wymuszeniami są:

- Skok jednostkowy $1(t)$ (tzw. funkcja Heaviside'a) – mówimy wówczas o odpowiedzi (charakterystyce) skokowej $h(t)$:

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

- Impuls Diraca $\delta(t)$ (tzw. funkcja wagi układu) – mówimy wówczas o odpowiedzi (charakterystyce) impulsowej $g(t)$:

$$x(t) = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

Charakterystyką (odpowiedzią) skokową układu dynamicznego nazywamy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego przy zerowych warunkach początkowych modelu.

Odpowiedź skokową układu dynamicznego wyznacza się ze wzoru:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (1)$$

W zależności od modelu układu (model zmiennych stanu lub model transmitancyjny) wyznaczenie charakterystyki skokowej polega na rozwiązaniu równań zmiennych stanu dla wymuszenia $1(t)$ lub znalezieniu transformaty odwrotnej transmitancji obiektu, pomnożonej przez transformatę operatorową funkcji $1(t)$. Oczywiście, rodzaj stosowanej transformaty operatorowej zależy od charakteru badanego układu (ciągły lub dyskretny). Charakterystyka skokowa pokazuje, w jaki sposób zachowuje się układ przy ciągłym dostarczaniu mu stałych porcji energii.

Odpowiedź skokową można wyznaczyć również doświadczalnie. Znajomość odpowiedzi na skok jednostkowy $h(t)$ pozwala wyznaczyć jego odpowiedź na dowolny sygnał wejściowy $x(t)$, z zależności zwanej całką Duhamela:

$$y(t) = h(t)x(0^+) + \int_0^t h(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau$$

lub

$$y(t) = h(t)x(0^+) + \int_0^t h(\tau)\dot{x}(t-\tau)d\tau$$

Charakterystyką impulsową układu dynamicznego nazywamy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych modelu. Odpowiedź impulsowa dana jest wzorem:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \quad (2)$$

W zależności od modelu układu (model zmiennych stanu lub model transmitancyjny) wyznaczenie charakterystyki impulsowej polega na rozwiązaniu równań zmiennych stanu dla wymuszenie $\delta(t)$ lub znalezieniu transformaty odwrotnej transmitancji obiektu pomnożonej przez transformatę operatorową funkcji $\delta(t)$. Oczywiście, rodzaj stosowanej transformaty operatorowej zależy od charakteru badanego układu (ciągły lub dyskretny). W przypadku układu dyskretnego należy pamiętać o tym, że impuls Diraca jest zastępowany impulsem jednostkowym. Charakterystyka impulsowa pokazuje, w jaki sposób zachowuje się układ przy jednorazowym dostarczaniu mu jednostkowej porcji energii.

Pomiędzy omawianymi charakterystykami (gdy rząd względny funkcji wymiernej, z której ma być obliczona transformata jest większy od zera) zachodzą następujące związki:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) \text{ dla } h(0) = 0 \quad (3)$$

oraz

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Odpowiedź impulsowa jest więc pochodną odpowiedzi skokowej. Znając odpowiedź impulsowa $g(t)$, można wyznaczyć, korzystając z twierdzenia o splocie, odpowiedź $y(t)$ układu na dowolne wymuszenie $x(t)$:

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

4 Odwrotne przekształcenie Laplace'a

Jak wynika ze wzorów (1) i (2) odpowiedzi skokowe oblicza się z wykorzystaniem odwrotnego przekształcenia Laplace'a tzn. znając funkcję zmiennej zespolonej $F(s)$, należy wyznaczyć funkcję $f(t)$, dla której $F(s)$ jest obrazem.

Zachodzą następujące pytania:

- jak wyznaczyć oryginał $f(t)$, znając jego transformatę (obraz) $F(s)$?
- czy każdej transformacie odpowiada tylko jeden oryginał?
- jakie warunki powinna spełnić funkcja $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = u + jv$, aby była transformatą?

4.1 Definicja odwrotnego przekształcenia Laplace'a

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4)$$

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest rozwiązaniem równania (4), to ten fakt będziemy zapisywać w postaci wzoru:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad (5)$$

który nazwiemy **odwrotnym przekształceniem Laplace'a**.

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest transformatą oryginału $f(t)$ o wykładniku wzrastania m_0 , to w każdym punkcie ciągłości funkcji $f(t)$ zachodzi wzór:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\beta}^{\alpha+j\beta} F(s) e^{st} ds \quad (6)$$

gdzie: $Re s = \alpha > m_0$.

Ze wzoru (6), który nazywamy *wzorem Mellina-Fouriera*, wynika, że jeżeli dwa oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mają tę samą transformatę, to oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mogą być różne tylko w swoich punktach nieciągłości, natomiast poza tymi punktami są identyczne.

Jeżeli funkcja $F(s)$ spełnia warunki:

- Jest funkcją analityczną w półpłaszczyźnie $Re s > \alpha > m_0$;
- $\lim_{Re s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$;
- Całka $\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds$ jest bezwzględnie zbieżna;

To funkcja $F(s)$ jest transformatą, a jej oryginał ma postać:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (7)$$

4.2 Właściwości odwrotnej transformaty Laplace'a:

1. liniowość:

$$L^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = L^{-1}\{F_1(s)\} + L^{-1}\{F_2(s)\} = f_1(t) + f_2(t) \quad (8)$$

2. jednorodność:

$$L^{-1}\{cF(s)\} = cL^{-1}\{F(s)\} = cf(t) \quad (9)$$

4.3 Metody obliczania odwrotnej transformaty Laplace'a

Twierdzenie o rozkładzie

Oryginał transformaty $F(s)$ jest równy sumie residuów funkcji $F(s)e^{st}$ w biegunach s_1, s_2, \dots, s_n (dla stopnia n mianownika większego od stopnia m licznika), czyli:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} F(s)e^{st} \quad (10)$$

Residuum funkcji $F(s)$ jest w biegunie s_k o krotności i oblicza się ze wzoru:

$$\operatorname{res}_{s=s_k} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow s_k} \left(\frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left(F(s)(s-s_k)^i e^{st} \right) \right) \right) \quad (11)$$

a dla jednokrotnego bieguna ze wzoru uproszczonego:

$$\operatorname{res}_{s=s_k} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow s_k} \left(F(s)(s-s_k) e^{st} \right) \quad (12)$$

Wzór Heaviside'a

Jeżeli $F(s)$ jest funkcją wymierną oraz $n > m$:

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (13)$$

a równanie $M(s)=0$ ma jednokrotne pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n będące biegunami jednokrotnymi funkcji $F(s)$, to na podstawie wzoru określającego residuum można napisać:

$$\operatorname{res}_{s=s_k} \frac{L(s)e^{st}}{M(s)} = \frac{L(s_k)(s-s_k)}{M(s)} e^{st} \Big|_{s=s_k} \quad (14)$$

dla $k=1, 2, \dots, n$. W powyższym wyrażeniu należy najpierw podzielić $M(s)$ przez $(s-s_k)$, a następnie podstawić $s=s_k$ (inaczej otrzyma się wyrażenie nieoznaczone):

$$\operatorname{res}_{s=s_k} \frac{L(s)e^{st}}{M(s)} = \frac{L(s_k)e^{s_k t}}{M'(s_k)} \quad (15)$$

Na podstawie twierdzenia o rozkładzie można napisać wzór Heaviside'a:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} \quad (16)$$

przy czym:

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{L(s)(s-s_k)}{M(s)} = \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} \quad (17)$$

Pierwiastki zespolone

Pierwiastki równania $M(s)=0$, będące biegunami funkcji wymiernej $F(s)$, są rzeczywiste lub zespolone sprzężone. Niech s_k, s_{k+1} oznaczają parę sprzężonych pierwiastków zespolonych (jednokrotnych) równania $M(s)=0$, wtedy:

$$s_k = \sigma + j\omega \quad s_{k+1} = \sigma - j\omega \quad (18)$$

Zgodnie ze wzorem Heavisida'ego współczynnik A_k, A_{k+1} można przedstawić w postaci wykładniczej:

$$A_k = \left. \frac{L(s)(s - \sigma - j\omega)}{M(s)} \right|_{s=s_k} = Ae^{j\theta} \quad (19)$$

$$A_{k+1} = \left. \frac{L(s)(s - \sigma + j\omega)}{M(s)} \right|_{s=s_{k+1}} = Ae^{-j\theta} \quad (20)$$

wobec czego suma składników odpowiadających pierwiastkom s_k, s_{k+1} we wzorze Heavisida'ego wynosi:

$$A_k e^{s_k t} + A_{k+1} e^{s_{k+1} t} = 2 \operatorname{Re} \{ A_k e^{s_k t} \} \quad (21)$$

Pierwiastki wielokrotne

Jeżeli równanie $M(s)=0$ posiada pierwiastki wielokrotne s_1, s_2, \dots, s_i oraz pierwiastki jednokrotne $s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n$ to zakładając $n > m$ transformatę odwrotną oblicza się jako:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{M(s)} \right\} = \sum_{k=1}^i \operatorname{res}_{s=s_k} \frac{L(s)e^{st}}{M(s)} + \sum_{k=i+1}^n A_k e^{s_k t} \quad (22)$$

Metoda rozkładu na ułamki proste

Jeżeli transformata $F(s)=L(s)/M(s)$ jest funkcją wymierną, gdzie:

$$L(s) = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (23)$$

$$M(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (24)$$

przy czym $l < n$ oraz wszystkie współczynniki $a_0, \dots, a_{n-1}, \dots, b_0, \dots, b_l$ są liczbami rzeczywistymi, to jedną z metod wyznaczania funkcji $f(t)$ jest metoda oparta na znanym z algebry rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste i wykonaniu odwrotnego przekształcenia Lapalce'ego L^{-1} każdego z ułamków z osobna.

Po rozłożeniu mianownika $M(s)$ na czynniki stopnia pierwszego otrzymujemy:

$$M(s) = (s - s_1)^{\alpha_1} (s - s_2)^{\alpha_2} \dots (s - s_k)^{\alpha_k} \quad (25)$$

gdzie s_1, s_2, \dots, s_k są pierwiastkami, ogólnie biorąc, zespolonymi o krotnościach równych odpowiednio $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (jest ich k różnych), przy czym:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n \quad (26)$$

Rozkład (25) będziemy nazywać rozkładem zespolonym. Jeśli N_0 oznacza liczbę różnych pierwiastków rzeczywistych wielomianu $M(s)$, to:

$$N_0 + 2k_0 = k \quad (27)$$

gdzie k_0 jest liczbą różnych par pierwiastków sprzężonych. Zatem otrzymamy rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste o postaci:

$$\begin{aligned} \frac{L(s)}{M(s)} = & \frac{C_{11}}{s-s_1} + \frac{C_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{C_{1\alpha_1}}{(s-s_1)^{\alpha_1}} + \frac{C_{21}}{s-s_2} + \frac{C_{22}}{(s-s_2)^2} + \dots + \frac{C_{2\alpha_2}}{(s-s_2)^{\alpha_2}} + \\ & + \dots + \frac{C_{k1}}{s-s_k} + \frac{C_{k2}}{(s-s_k)^2} + \dots + \frac{C_{k\alpha_k}}{(s-s_k)^{\alpha_k}} = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ik}}{(s-s_i)^k} \end{aligned} \quad (28)$$

przy czym współczynniki C_{ik} są, ogólnie biorąc, zespolone. Można je wyliczyć w znany sposób, sprowadzając prawą stronę wzoru (28) do wspólnego mianownika $M(s)$ i przyrównując tożsamościowo liczniki.

Uwzględniając wzór:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{L(s_k)}{M^{(1)}(s_k)} e^{s_k t}$$

dla $t \geq 0$ mamy:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s-s_i)^k} \right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_i t} \quad (29)$$

Dla dowolnych zespolonych s_i , wykonując odwrotne przekształcenie Laplace'a obu stron równości (28), otrzymujemy ogólny wzór w postaci:

$$L^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \right] = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_i t} \quad (30)$$

Współczynniki C_{ik} można również obliczyć bezpośrednio ze wzoru:

$$C_{ik} = \frac{1}{(\alpha_i - k)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{\alpha_i - k}}{d_s^{\alpha_i - k}} \left[\frac{L(s)}{M(s)} (s - s_i)^{\alpha_i} \right] \quad (31)$$

gdzie: $k=1, 2, \dots, \alpha_i; i=1, 2, \dots, k$.

W praktyce inżynierskiej najczęściej spotykamy się z przypadkiem, kiedy wszystkie pierwiastki s_i mianownika $M(s)$ są pojedyncze. Ponieważ wszystkie współczynniki α_i dla tego przypadku są równe jedności, to możemy zapisać $\alpha_i=1; i=1, 2, \dots, k = n$, zatem wszystkie sumy względem wskaźnika k (wzór 25) oraz (wzór (30)) redukują się do pojedynczych wyrazów dla $k = 1$. Oznaczając $C_{1i}=C_i$, otrzymujemy rozkład na ułamki proste w postaci:

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s-s_i} \quad (32a)$$

oraz dla wielokrotnych pierwiastków:

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{C_1}{(s-s_i)^n} + \frac{C_2}{(s-s_i)^{n-1}} + \frac{C_3}{(s-s_i)^{n-2}} + \dots + \frac{C_n}{s-s_i} \quad (32b)$$

Ponieważ $t > 0$, po wykonaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a L^{-1} równości (32a) dla przypadku pojedynczych pierwiastków s_i otrzymujemy:

$$L^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \right] = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} \quad (33)$$

Współczynniki możemy obliczać, sprowadzając prawą stronę wzoru (32a) do wspólnego mianownika, lub ze wzoru ogólnego (31), który przybiera postać:

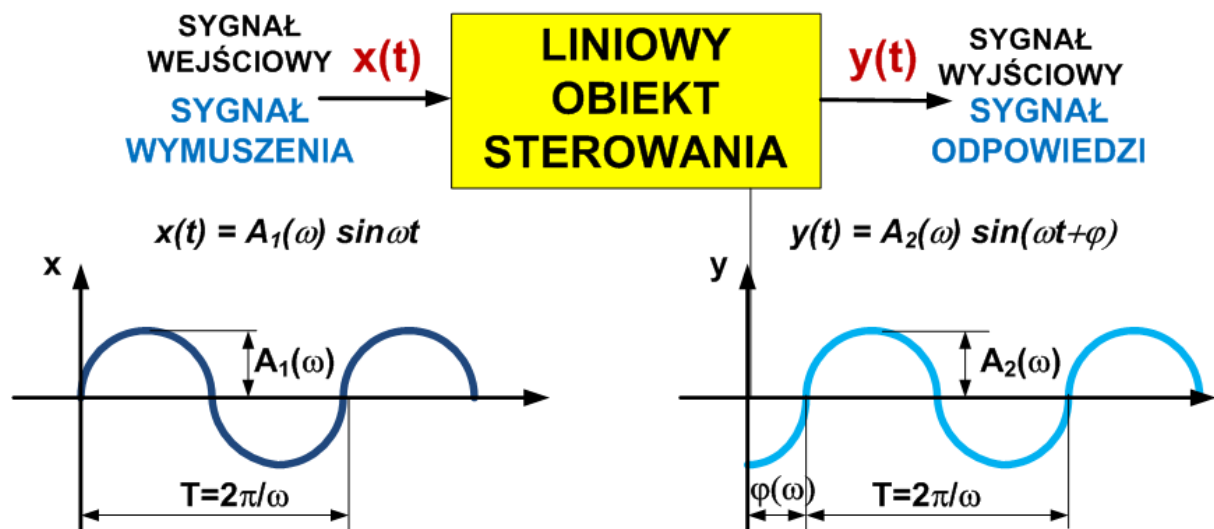
$$C_i = \frac{L(s)}{M(s)} (s - s_i) \Big|_{s=s_i} \quad (34)$$

a dla przypadku wielokrotnych pierwiastków s_i :

$$C_i = \frac{1}{(\alpha_i - 1)!} \left[\frac{d^{\alpha_i - k}}{ds^{\alpha_i - k}} \left(\frac{L(s)}{M(s)} (s - s_i)^{\alpha_i} \right) \right] \Big|_{s=s_i} \quad (35)$$

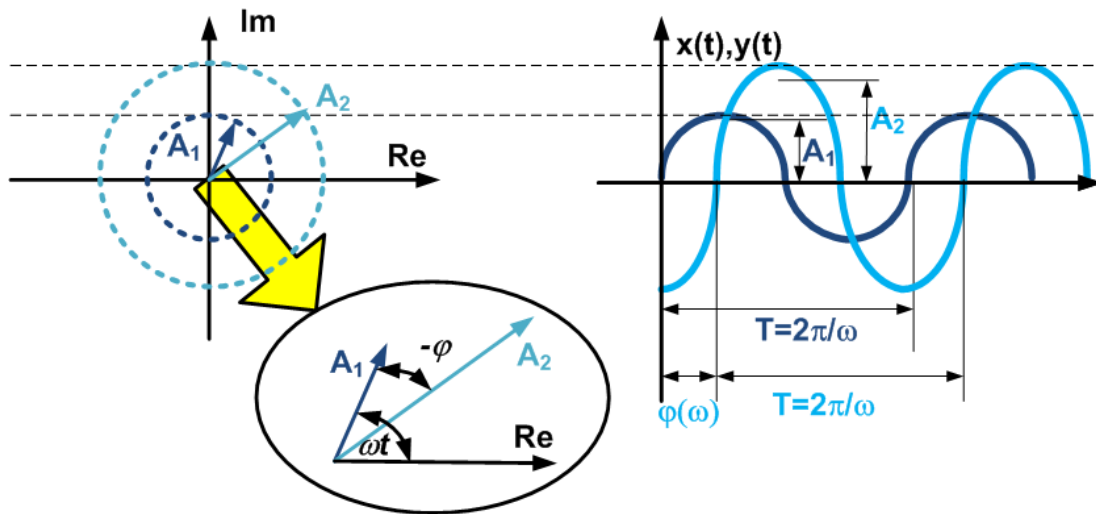
5 Charakterystyki częstotliwościowe

W dotychczasowych rozważaniach elementy liniowe automatyki charakteryzowane były między innymi przez odpowiedzi na sygnał skokowy. Poniższe zagadnienia będą dotyczyły tylko elementu liniowego, na którego wejście podano sygnał harmoniczny $x(t) = A_1(\omega) \sin(\omega t)$. Wówczas sygnał odpowiedzi układu ma również przebieg harmoniczny opisany zależnością $y(t) = A_2(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$. Schemat takiego układu przedstawiono na rys.1.



Rys.1. Ogólny symbol graficzny elementu liniowego

Można to przedstawić graficznie jako odpowiednie rzuty wektorów A_1 i A_2 na oś x i y , wirujących z prędkością kątową ω - rys.2.



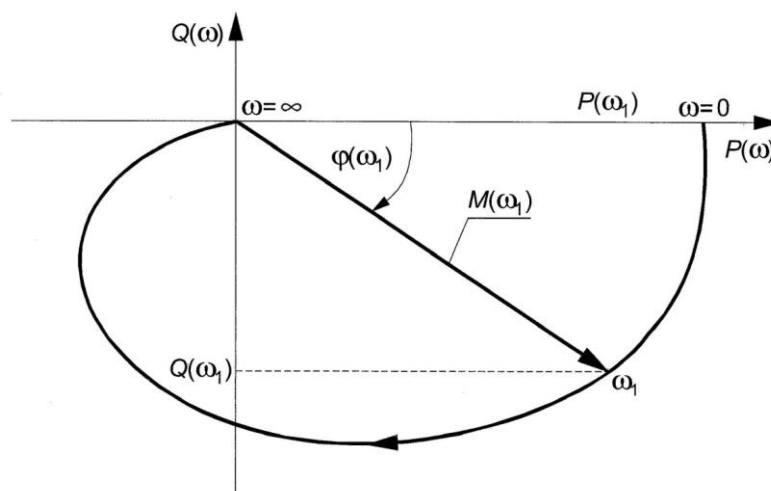
Rys.2. Przebiegi czasowe wymuszenia $x(t)$ i odpowiedzi $y(t)$

Wyróżnia się następujące rodzaje charakterystyk częstotliwościowych układu:

1. charakterystykę amplitudowo-fazową;
2. charakterystykę amplitudową;
3. charakterystykę amplitudową;
4. charakterystykę fazową;
5. charakterystyki logarytmiczne (amplitudową i fazową).

Charakterystyką amplitudowo – fazową $F_{af}(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $G(j\omega)$ nazywamy funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej, w której wartości są określone następującym wzorem:

$$F_{af}(\omega) = G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$



Rys.3. Charakterystyka amplitudowo - fazowa

Transmitancja widmowa dla każdej pulsacji, np. $\omega = \omega_1$, jest liczbą zespoloną, a więc wyznacza na płaszczyźnie $P(\omega)$, $jQ(\omega)$ punkt o współrzędnych $P(\omega_1)$, $Q(\omega_1)$. Punkt ten jest końcem wektora $G(j\omega_1)$ o długości $M(\omega_1)$ i kącie nachylenia $\varphi(\omega_1)$.

Charakterystyka amplitudowo – fazowa jest więc miejscem geometrycznym punktów, jakie zakreśla koniec wektora $G(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przy zmianie pulsacji sygnału wejściowego od 0 do ∞ .

Charakterystyka amplitudowo – fazowa układu rzeczywistego, dla którego stopień wielomianu licznika transmitancji jest niższy od stopnia wielomianu mianownika, dążą do początku układu współrzędnych:

$$G(j\omega) \rightarrow 0, \text{ gdy } \omega \rightarrow \infty$$

Charakterystyką amplitudową $F_a(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $G(j\omega)$ nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω , której wartości są określone następującym wzorem:

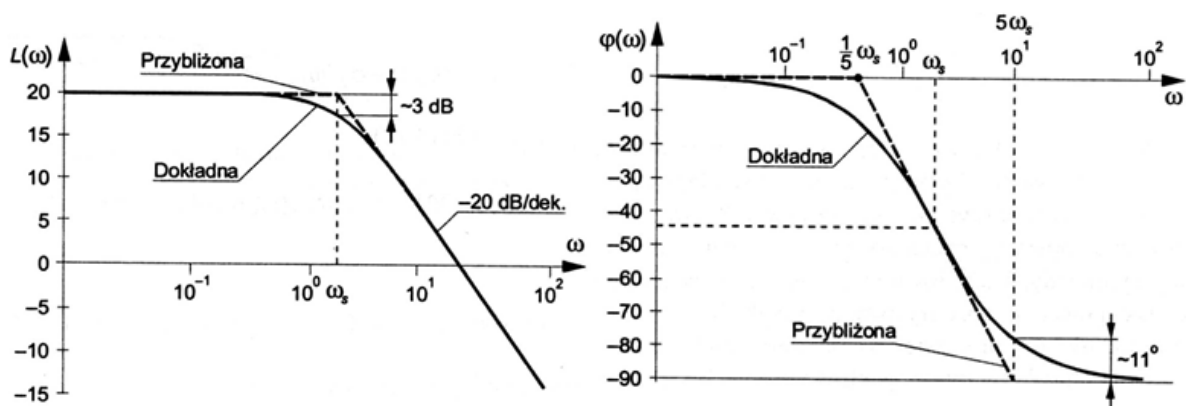
$$F_a(\omega) = |G(j\omega)|$$

Charakterystyką fazową $F_f(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $G(j\omega)$ nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω , której wartości są określone następującym wzorem:

$$F_f(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

Charakterystyki amplitudowa i fazowa, wykreślone w układach współrzędnych, w których oś odciętych wyrażona jest w skali logarytmicznej nazywamy *charakterystykami logarytmicznymi*

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log M(\omega)$$



Rys.4. Charakterystyki logarytmiczne: amplitudowa i fazowa

6 Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe podstawowych elementów automatyki

6.1 Elementy inercyjne i bezinercyjne

Elementem inercyjnym pierwszego rzędu nazywać będziemy element opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$T \dot{y} + y = ku$$

gdzie: k – współczynnik wzmocnienia określony jako stosunek odpowiedzi y do wymuszenia u w stanie ustalonym, T – stała czasowa.

i transmitancją operatorową postaci:

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT}$$

Szczególnym przypadkiem elementu inercyjnego pierwszego rzędu dla $T = 0$ jest element bezinercyjny (proporcjonalny, wzmacniający). Elementem bezinercyjnym nazywać będziemy element opisany równaniem algebraicznym o postaci:

$$y = ku$$

i transmitancją operatorową postaci:

$$G(s) = k$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest wykresem transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

którą otrzymujemy z transmitancji operatorowej $G(s) = \frac{k}{1 + sT}$ podstawiając $s = j\omega$.

Charakterystyka ta ma postać półokręgu o średnicy k , położonego w czwartej ćwiartce (rys.5b).

Zależność określającą logarytmiczną charakterystykę amplitudową

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{|k|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

można aproksymować wyrażeniem:

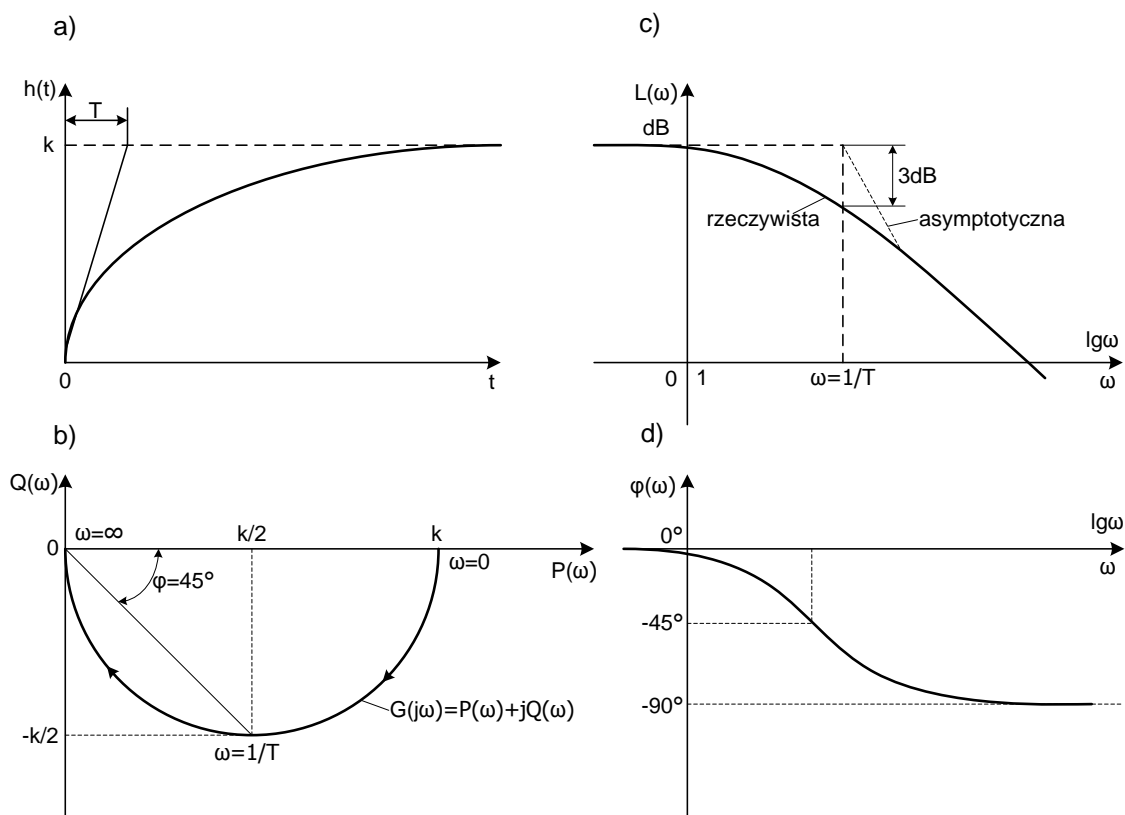
$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |k| & \text{dla } \omega < \frac{1}{T} \\ 20 \lg \frac{|k|}{T} - 20 \lg \omega & \text{dla } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma więc postać łamanej złożonej z dwóch półprostych (rys.5c). Punktem załamania tej charakterystyki jest punkt $\omega = 1/T$. Największa różnica między logarytmiczną charakterystyką amplitudową rzeczywistą i asymptotyczną występuje w punkcie załamania i wynosi:

$$20 \lg \frac{|k|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} - 20 \lg |k| = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

Logarytmiczną charakterystykę fazową elementu inercyjnego pierwszego rzędu (rys.5d) określa wzór:

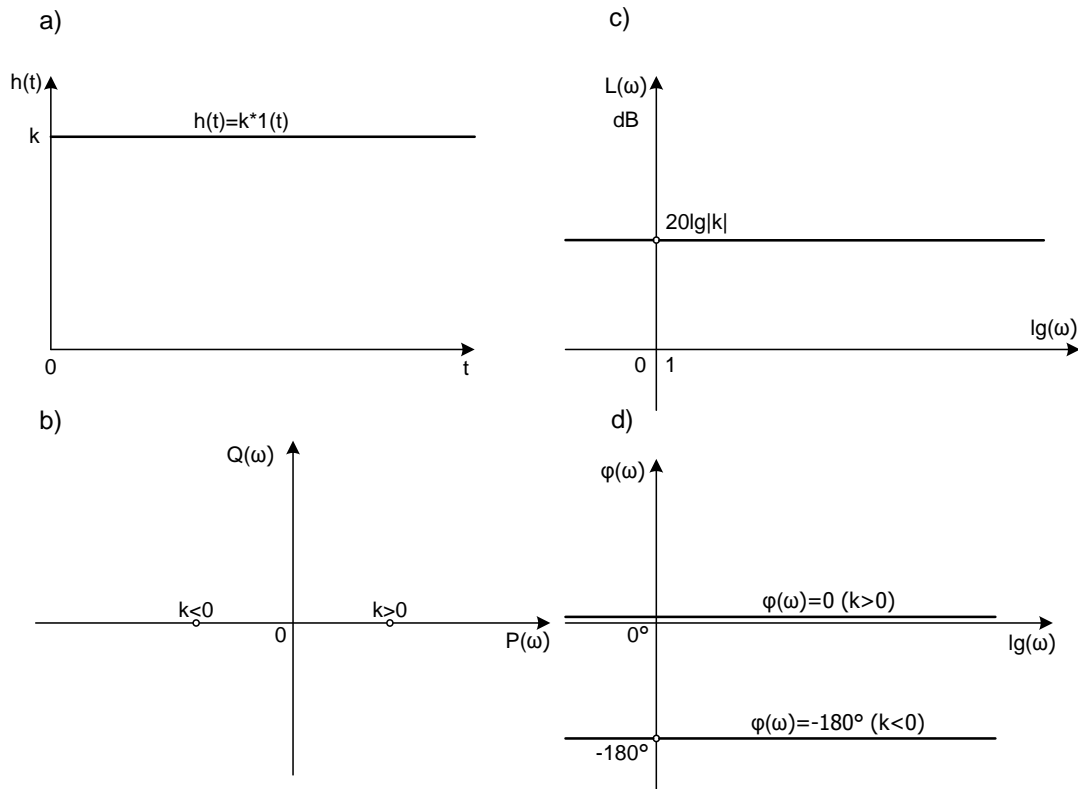
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -\arctg \omega T$$



Rys.5. Charakterystyki elementu inercyjnego pierwszego rzędu: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystykę skokową, amplitudowo-fazową oraz logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową elementu bezinercyjnego przedstawia rys.6.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu bezinercyjnego jest punktem położonym dla $k > 0$ na dodatniej, a dla $k < 0$ na ujemnej półosi liczb rzeczywistych (rys.6b). Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa elementu bezinercyjnego (rys.6c) ma wartość stałą równą $20 \lg |k|$, a logarytmiczna charakterystyka fazowa (rys.6d) przyjmuje wartość 0° dla $k > 0$ oraz -180° dla $k < 0$.



Rys.6. Charakterystyki elementu bezinercyjnego: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

6.2 4.2. Elementy całkujące

Elementem całkującym z inercją nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$T \ddot{y} + \dot{y} = ku,$$

gdzie: k – współczynnik wzmocnienia prędkościowego, określony jako stosunek pochodnej odpowiedzi y do wymuszenia u w stanie ustalonym, T – stała czasowa.

i transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + sT)}$$

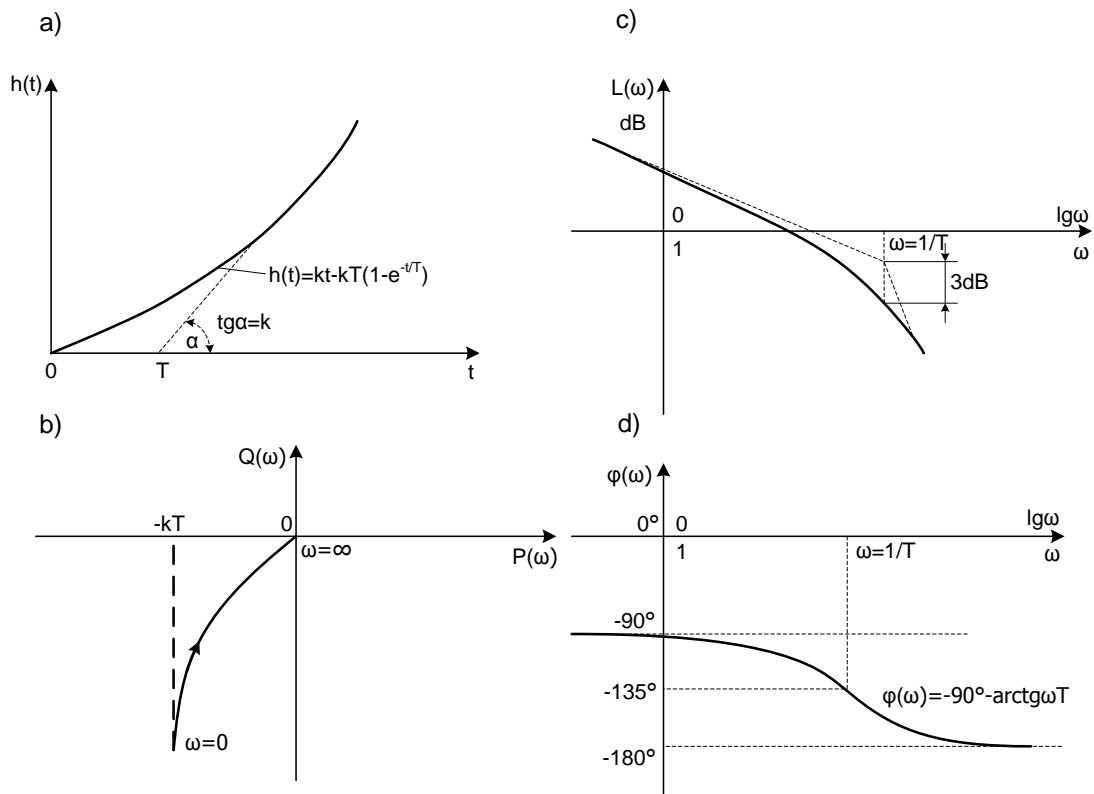
Szczególnym przypadkiem elementu całkującego z inercją dla $T = 0$ jest element całkujący zwany idealnym elementem całkującym. Elementem całkującym nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$\dot{y} = ku$$

i transmitancją operatorową postaci:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

Charakterystykę skokową, amplitudowo-fazową oraz charakterystyki logarytmiczne amplitudową i fazową elementu całkującego z inercją przedstawia rys.7.



Rys.7. Charakterystyki członu całkującego z inercją: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystykę amplitudowo-fazową elementu całkującego z inercją przedstawia rys.7b, będącą wykresem transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

gdzie:

$$P(\omega) = -\frac{kT}{1 + (\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega[1 + (\omega T)^2]}$$

Zależność określającą logarytmiczną charakterystykę amplitudową:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{|k|}{\omega \sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

można aproksymować wyrażeniem:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |k| - 20 \lg \omega \\ 20 \lg \frac{|k|}{T} - 40 \lg \omega \end{cases}$$

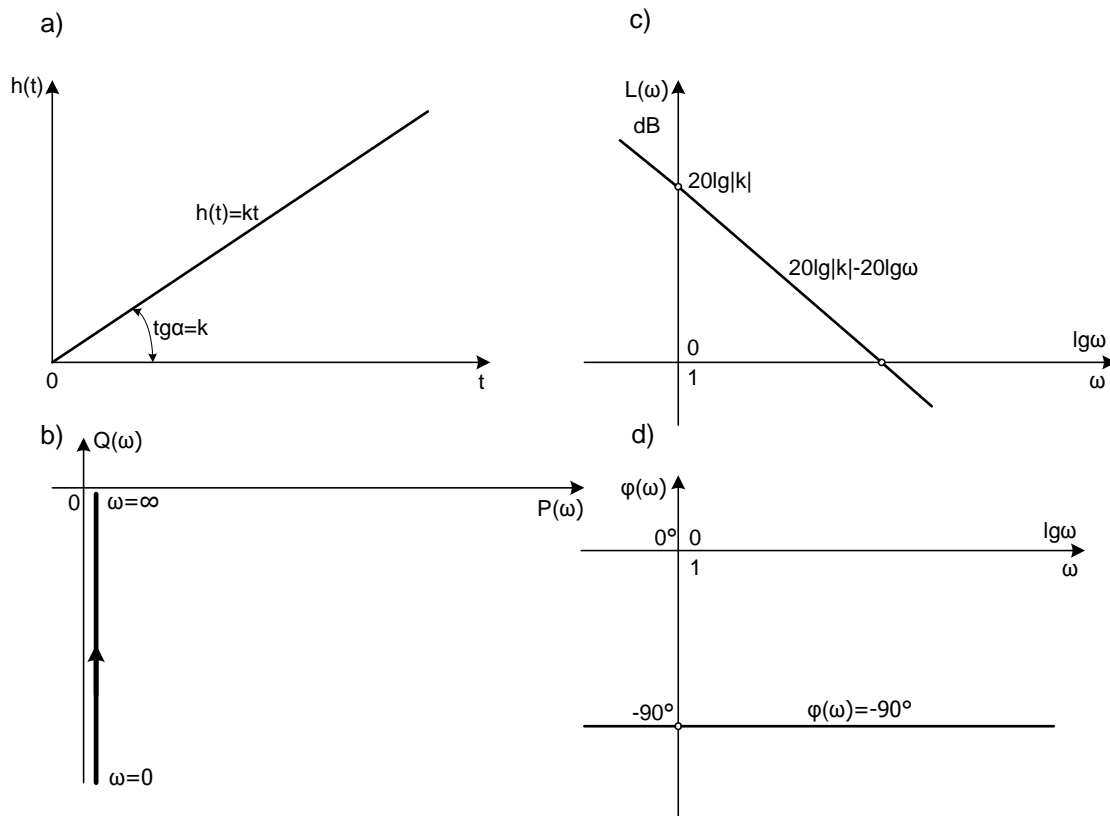
Asymptotyczna logarymiczna charakterystyka amplitudowa ma więc postać łamanej złożonej z dwóch półprostych (rys.7c). Punktem załamania tej charakterystyki jest punkt $\omega = 1/T$. Największa różnica między logarymiczną charakterystyką amplitudową rzeczywistą i asymptotyczną występuje w punkcie załamania i wynosi:

$$20 \lg \frac{|k|}{\omega \sqrt{1 + (\omega T)^2}} \Big|_{\omega=1/T} - (20 \lg |k| - 20 \lg \omega) = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

Logarymiczną charakterystykę fazową elementu całkującego z inercją (rys.7d) określa wzór:

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T .$$

Charakterystykę skokową, amplitudowo-fazową oraz logarymiczne charakterystyki amplitudową i fazową elementu całkującego przedstawia rys.8.



Rys.8. Charakterystyki elementu całkującego z inercją: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarymiczna amplitudowa, d) logarymiczna fazowa

Charakterystyka amplitudowo – fazowa tego elementu, będąca wykresem transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

pokrywa się z ujemną półosią urojoną (rys.8b).

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, określona zależnością:

$$L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)| = 20\lg |k| - 20\lg \omega$$

jest linią prostą o współczynniku kierunkowym -20dB/dekadę , która przecina oś odciętych w punkcie $\omega = k$ (rys.8c). Logarytmiczna charakterystyka fazowa (rys.8d) jest określona zależnością:

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -90^\circ$$

6.3 Elementy różniczkujące

Elementem różniczkującym z inercją (lub rzeczywistym elementem różniczkującym) nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$T \dot{y} + y = k \dot{u},$$

gdzie: k – współczynnik wzmocnienia, określony jako stosunek odpowiedzi y do pochodnej wymuszenia u w stanie ustalonym, T – stała czasowa.

i o transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = \frac{ks}{1 + sT}$$

Szczególnym przypadkiem członu różniczkującego z inercją dla $T = 0$ jest element różniczkujący idealny, który krótko nazywać będziemy elementem różniczkującym. Elementem różniczkującym nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem o postaci:

$$y = k \dot{u}$$

i transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = ks$$

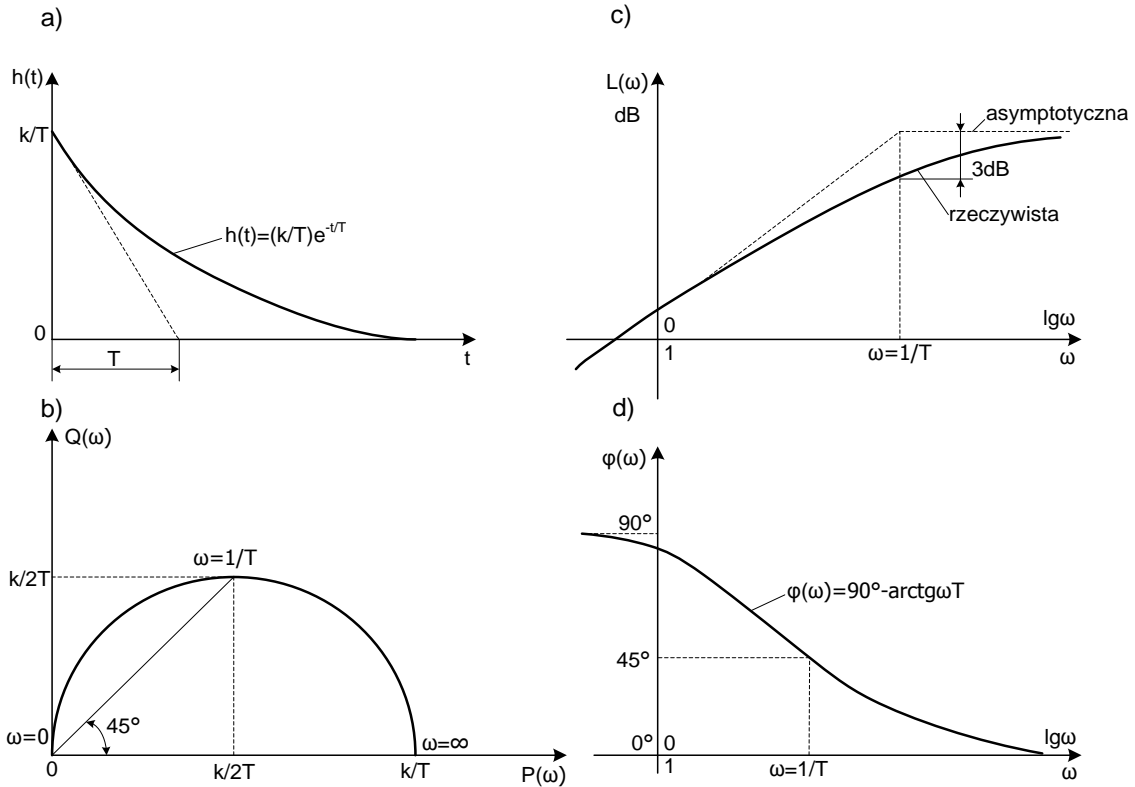
Charakterystykę skokową, amplitudowo – fazową oraz charakterystyki logarytmiczne amplitudową i fazową elementu różniczkującego z inercją przedstawia rys.9.

Charakterystyka amplitudowo – fazowa elementu różniczkującego z inercją jest wykresem transmitancji widmowej o postaci:

$$G(j\omega) = \frac{jk\omega}{1 + j\omega T} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

przy czym:

$$P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + (\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1 + (\omega T)^2}$$



Rys.9. Charakterystyki elementu różniczkującego z inercją: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystyka ta ma postać półokręgu położonego w pierwszej ćwiartce o średnicy k/T i środka w punkcie $(k/2T, 0)$ (rys.9b).

Zależność, określającą logarytmiczną charakterystykę amplitudową:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{|k| \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

można aproksymować wyrażeniem:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |k| + 20 \lg \omega \\ 20 \lg \frac{|k|}{T} \end{cases}$$

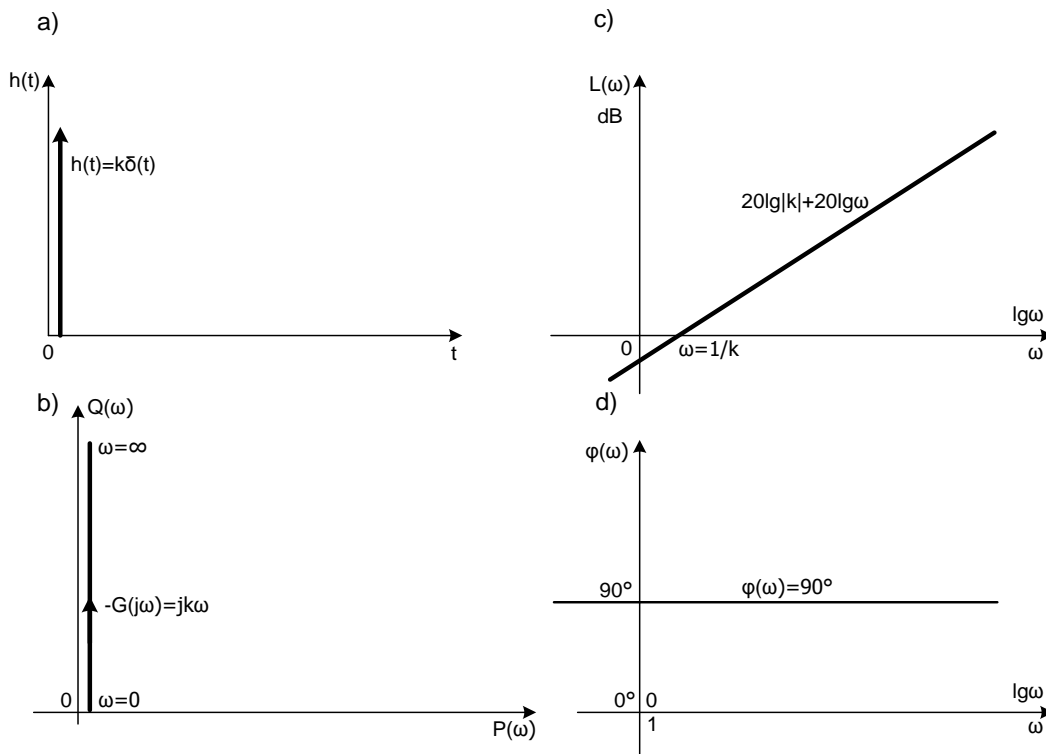
Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma więc postać łamanej złożonej z dwóch półprostych (rys.9c). Punktem załamania tej charakterystyki jest punkt $\omega = 1/T$. Największa różnica między logarytmiczną charakterystyką amplitudową rzeczywistą i asymptotyczną występuje w punkcie załamania i wynosi:

$$20 \lg \frac{|k| \omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \Big|_{\omega=1/T} - (20 \lg |k| + 20 \lg \omega) = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3dB$$

Logarytmiczną charakterystykę fazową elementu różniczkującego z inercją (rys.9d) określa wzór:

$$\varphi(\omega) = \arctan G(j\omega) = 90^\circ - \arctg \omega T$$

Charakterystykę skokową, amplitudowo – fazową oraz logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową elementu różniczkującego przedstawia rys.10.



Rys.10. Charakterystyki członu różniczkującego: a) skokowa, b) amplitudowo-fazowa, c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystyka amplitudowo – fazowa tego członu, będąca wykresem transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

pokrywa się z dodatnią półosią urojoną (rys.10b). Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, określona zależnością:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg |k| + 20 \lg \omega$$

jest linią prostą o współczynniku kierunkowym 20dB/dekadę, przecinającą oś odciętych w punkcie $\omega = 1/k$ (rys.10c). Logarytmiczną charakterystykę fazową elementu różniczkującego (rys.10c) określa zależność:

$$\varphi(\omega) = \arctan G(j\omega) = 90^\circ$$

6.4 Element oscylacyjny

Elementem oscylacyjnym (drugiego rzędu) nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = k\omega_n^2 u$$

lub

$$T_n^2 \ddot{y} + 2\xi T_n \dot{y} + y = ku$$

gdzie: T_n – okres drgań własnych nie tłumionych, $\omega_n = 1/T_n$ – pulsacja drgań własnych nie tłumionych, ξ - względny współczynnik tłumienia ($0 < \xi < 1$), k – współczynnik wzmocnienia określony jako stosunek odpowiedzi y do wymuszenia u w stanie ustalonym.

oraz transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

a po podstawieniu $\omega_n = 1/T_n$:

$$G(s) = \frac{k}{T_n^2 s^2 + 2\xi T_n s + 1}$$

Zauważmy, że dla $0 < \xi < 1$ bieguny transmitancji $G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, czyli pierwiastki równania:

$$M(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

są zespolone sprzężone o ujemnej części rzeczywistej:

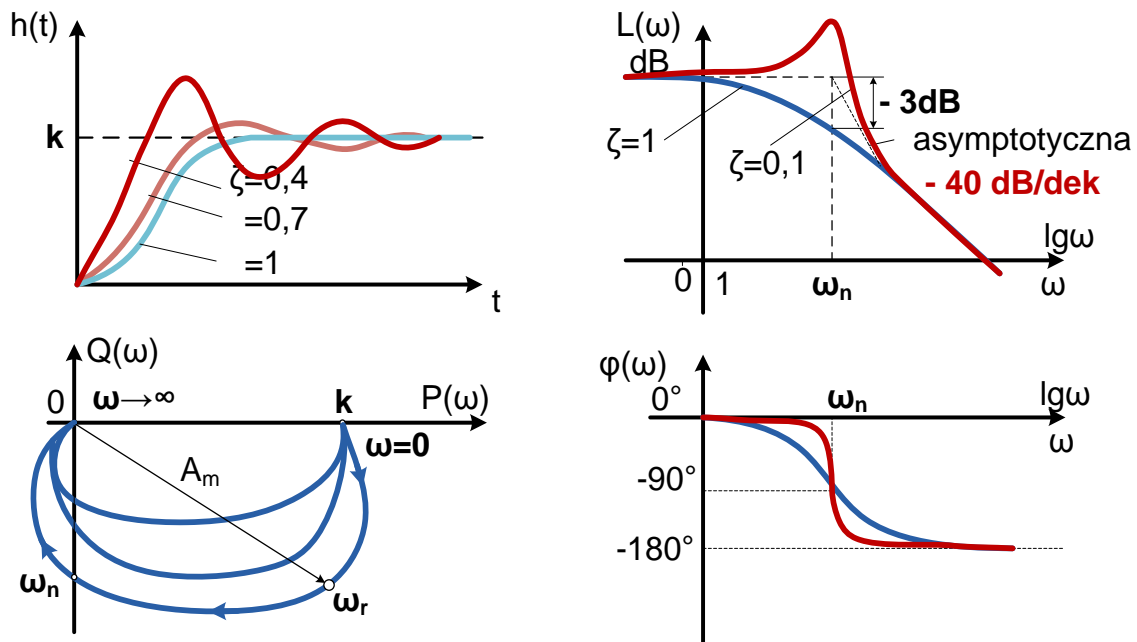
$$s_1 = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}), \quad s_2 = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2}).$$

Dla $\xi \geq 1$ bieguny s_1 i s_2 są rzeczywiste i element oscylacyjny staje się elementem inercyjnym drugiego rzędu. Charakterystykę amplitudowo – fazową przedstawia rys.11.

Charakterystyka amplitudowo – fazowa elementu oscylacyjnego jest wykresem transmitancji widmowej o postaci:

$$G(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

$$\text{gdzie: } P(\omega) = \frac{k\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\omega_n^3\xi\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}.$$



Rys.11. Charakterystyki członu oscylacyjnego: a) skokowa, b) amplitudowo - fazowa

Charakterystykę tę dla trzech różnych wartości ξ przedstawia rys.11b. Zależność, określającą logarytmiczną charakterystykę amplitudową:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{|k| \omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

dla $0,4 < \xi < 0,6$ można aproksymować wyrażeniem:

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |k| \\ 20 \lg |k| - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_n} \end{cases}$$

W tym przypadku asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma więc postać łamanej złożonej z dwóch półprostych. Logarytmiczna charakterystyka fazowa elementu oscylacyjnego określona jest zależnością:

$$\varphi(\omega) = \text{arc}G(j\omega) = -\text{arctg} \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

6.5 Element opóźniający

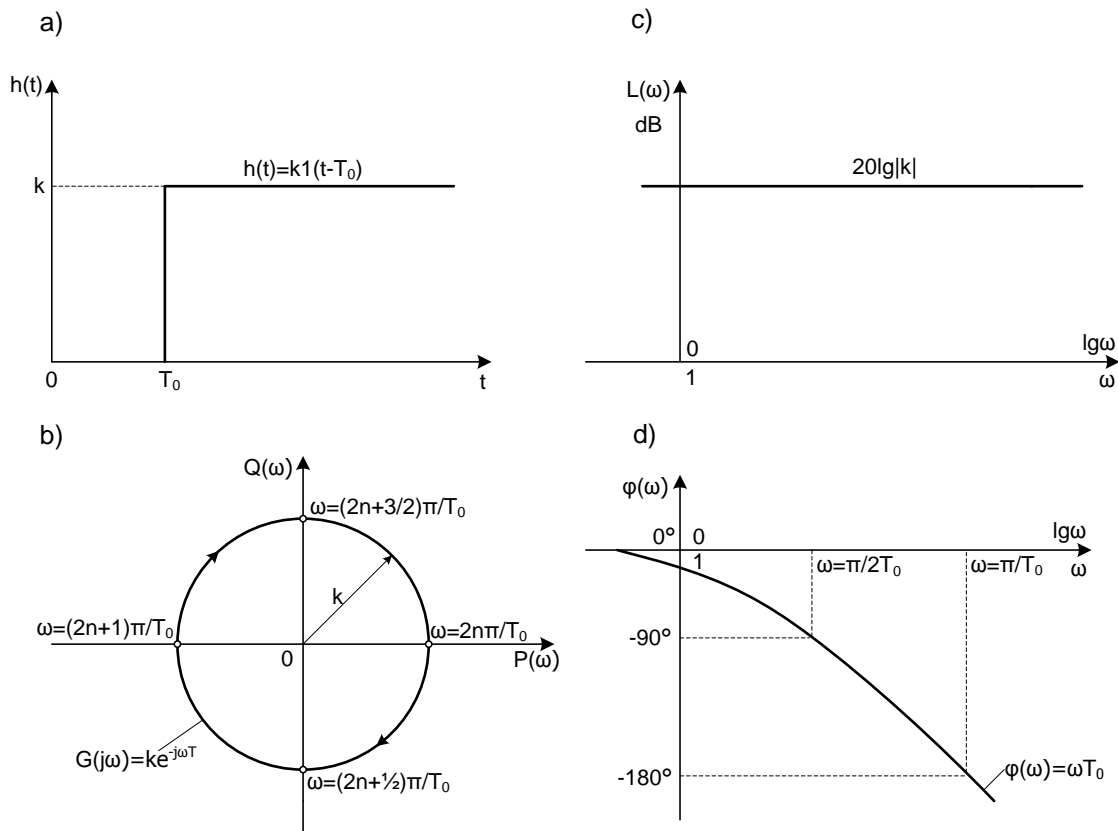
Elementem opóźniającym nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem o postaci:

$$y(t) = ku(t - T_0)$$

gdzie: k – współczynnik wzmocnienia określony jako stosunek odpowiedzi y do wymuszenia u dla $t > T_0$, T_0 – czas opóźnienia.

i o transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = ke^{-sT_0}.$$



Rys.12. Charakterystyki elementu opóźniającego: a) skokowa, b) amplitudowo – fazowa
 c) logarytmiczna amplitudowa, d) logarytmiczna fazowa

Charakterystyka amplitudowo – fazowa tego członu, będąca wykresem transmitancji widmowej:

$$G(j\omega) = ke^{-j\omega T_0}$$

ma postać okręgu o promieniu k i środku w początku układu współrzędnych (rys.12b).

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa tego członu, określona zależnością:

$$L(\omega) = 20 \lg |k|$$

ma postać prostej poziomej (rys. 12c), a logarytmiczna charakterystyka fazowa, określona zależnością:

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -\omega T_0$$

maleje ze wzrostem pulsacji ω (rys.12d).

6.6 Element forsujący

Elementem forsujący nazywać będziemy element automatyki opisany równaniem różniczkowym o postaci:

$$T \dot{y} + y = u$$

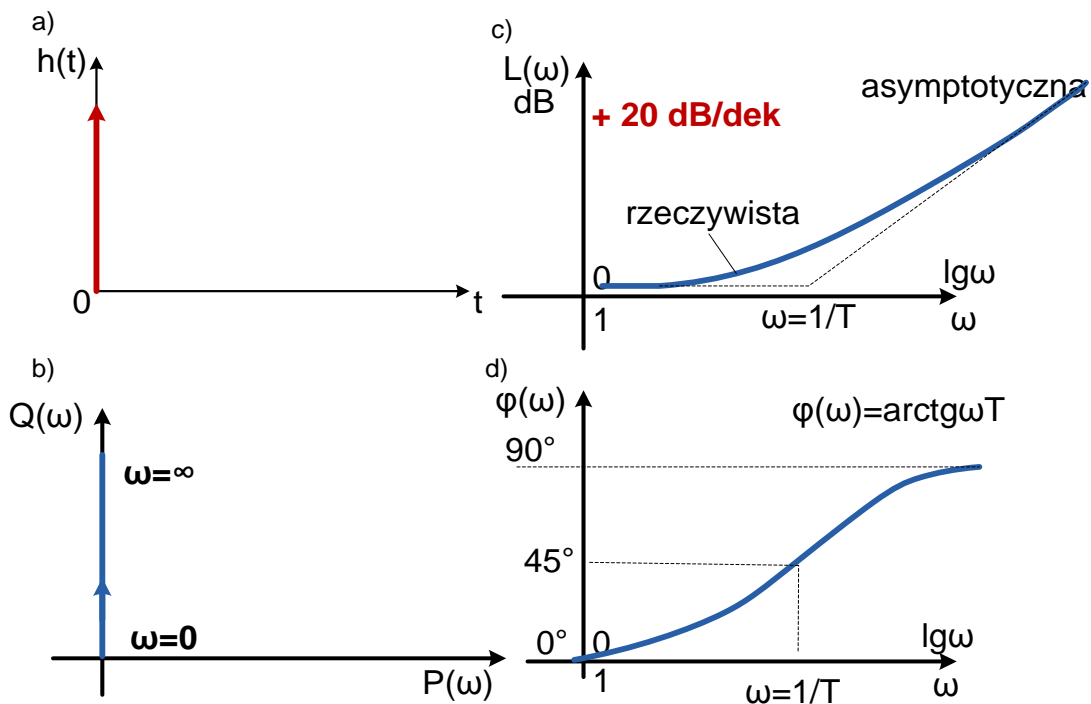
gdzie: T – stała

oraz transmitancji operatorowej postaci:

$$G(s) = Ts + 1$$

Praktyczna realizacja takiego elementu jest niemożliwa ze względu na występowanie w układach rzeczywistych inercji. Dlatego też, do dalszej analizy, należałoby przyjąć, że przedstawione charakterystyki mają charakter idealny.

Charakterystykę amplitudowo – fazową i charakterystyki logarytmiczne elementu forsującego przedstawia rys.13.



Rys.13. Charakterystyki forsującego: a) skokowa, b) amplitudowo - fazowa

Charakterystyka amplitudowo – fazowa elementu forsującego jest wykresem transmitancji widmowej o postaci:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T ,$$

Moduł transmitancji widmowej określony jest zależnością;

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} ,$$

natomiast argument;

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega T),$$

Zależność, określającą logarytmiczną charakterystykę amplitudową:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Charakterystykę tę można aproksymować wyrażeniem:

$$L(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega < \frac{1}{T} \\ 20 \lg \omega & \text{dla } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

W tym przypadku asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa ma więc postać łamanej złożonej z dwóch półprostych.

7 Przykłady zadań rachunkowych

7.1 Przykład 1.

Znaleźć oryginał transformaty $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

W tym przypadku do obliczenia oryginału transformaty $F(s)$ wykorzystane zostanie twierdzenie o rozkładzie. W tym celu zostanie wykorzystana zależność (7):

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{s=s_k} F(s) e^{st}$$

Aby rozwiązać powyższe równanie należy skorzystać ze wzoru (12), ponieważ funkcja $F(s)$ posiada dwa bieguny jednokrotne: $s_{k1} = 0$; $s_{k2} = -1$.

Stąd:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{s=s_k} F(s) e^{st} = \sum_{k=1}^2 \lim_{s \rightarrow s_k} (F(s)(s - s_k) e^{st}) = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_{k1}} (F(s)(s - s_{k1}) e^{st}) + \lim_{s \rightarrow s_{k2}} (F(s)(s - s_{k2}) e^{st}) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s(s+1)} s e^{st} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{1}{s(s+1)} (s+1) e^{st} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(s+1)} s e^{st} \right) + \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{1}{s} e^{st} \right) = 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

7.2 Przykład 2.

Znaleźć oryginał transformaty $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$.

W tym przypadku do obliczenia oryginału transformaty $F(s)$ wykorzystane zostanie twierdzenie o rozkładzie. W tym celu zostanie wykorzystana zależność (10):

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{s=s_k} F(s) e^{st}$$

Aby rozwiązać powyższe równanie należy skorzystać ze wzoru (11), ponieważ funkcja $F(s)$ posiada jeden bieg dwukrotny: $s_{k1} = -1$;

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{s=s_k} F(s) e^{st} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d}{ds} (F(s)(s-s_k)^2 e^{st}) =$$

Stąd

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s+1)^2} (s+1)^2 e^{st} \right) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (e^{st}) = te^{-t}$$

7.3 Przykład 3.

Dana jest transformata $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^3}$.

Wyznaczyć oryginał transformaty $F(s)$ metodą rozkładu na ułamki proste.

Na podstawie wzoru (28) możemy zapisać:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^3} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_{21}}{s-1} + \frac{A_{22}}{(s-1)^2} + \frac{A_{23}}{(s-1)^3}$$

następnie wyrażenie to sprowadzamy do wspólnego mianownika i otrzymujemy:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^3} = \frac{A_1(s-1)^3 + A_{21}(s+1)(s-1)^2 + A_{22}(s+1)(s-1) + A_{23}(s+1)}{(s+1)(s-1)^3}$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy: $A_1 = -1/8$, $A_{21} = 1/8$, $A_{22} = -1/4$, $A_{23} = 1/2$. Wyliczając oryginał $f(t)$ możemy zapisać w postaci:

$$f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{2}t^2e^t = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}(1-2t+4t^2)e^t$$

7.4 Przykład 4.

Wyznaczyć charakterystykę skokową i impulsową układu dynamicznego opisanego następującą transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

W pierwszym etapie wyznaczona zostanie odpowiedź skokowa układu. Zgodnie z zależnością (6) odpowiedź skokowa jest równa:

$$h(t) = L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]$$

W związku z tym, podstawiamy do powyższego wzoru zależność $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$ i otrzymujemy wówczas:

$$h(t) = L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right] = L^{-1} \left[\frac{k}{(Ts+1)s} \right] = L^{-1} \left[\frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} \right]$$

W dalszych przekształcenia zostanie wykorzystane twierdzenie o rozkładzie, zgodnie z którym oryginał transformaty jest równy sumie residuów funkcji $(G(s)/s)e^{st}$ w biegunach s_1, s_2, \dots, s_n , czyli

$$h(t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{s=s_k} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{G(s)}{s} e^{st} + \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \frac{G(s)}{s} e^{st}$$

Układ posiada dwa pierwiastki $s_1 = -1/T$ i $s_2 = 0$. Stąd:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} + \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \left(s + \frac{1}{T}\right) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} + \lim_{s \rightarrow 0} (s - 0) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} = -k e^{-\frac{1}{T}t} + k = k \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \end{aligned}$$

Natomiast charakterystykę impulsową $g(t)$ będziemy wyznaczać z zależności (6), czyli:

$$g(t) = L^{-1} [G(s)]$$

Postępując analogicznie, jak przy wyznaczaniu charakterystyki skokowej otrzymujemy:

$$h(t) = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \left(s + \frac{1}{T}\right) \frac{\frac{k}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s} e^{st} = \frac{k}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$$

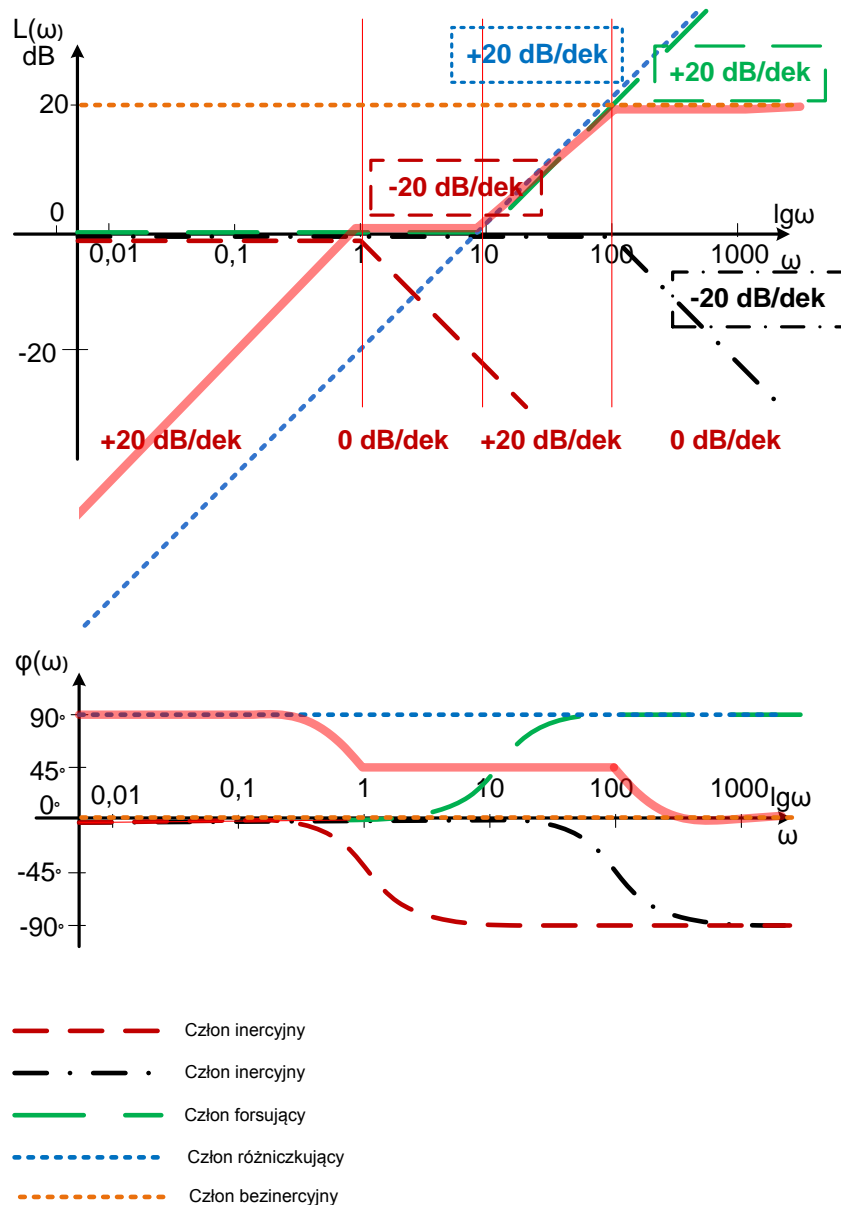
7.5 Przykład 5.

Wyznaczyć charakterystykę Bode układu dynamicznego opisanego następującą transmitancją operatorową: $G(s) = \frac{10s(0,1s+1)}{(0,01s+1)(s+1)}$.

Na początku określone są parametry układu:

- wzmacnienie układu $k = 10 \Rightarrow \omega_1 = 0,1$;
- stała czasowa członu forsującego $T = 0,1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{T} = 10$;
- stała czasowa członu inercyjnego $T = 0,01 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{T} = 100$;
- stała czasowa członu inercyjnego $T = 1 \Rightarrow \omega_4 = \frac{1}{T} = 1$;
- wzmacnienie członu różniczkującego $k = 1 \Rightarrow \omega_5 = \frac{1}{T} = 1$

Dla układu opisanego transmitancją $G(s)$ rysujemy w pierwszej kolejności charakterystyki składowych elementów automatyki zgodnie z ww. parametrami. Ze względu na charakter przybliżony charakterystyki układu, dla tych celów korzystając będziemy z tzw. charakterystyk asymptotycznych.



Rys.12. Charakterystyki Bode układu z przykładu nr 5.

8 Literatura

1. Janusz KOWAL „Podstawy automatyki T1”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004, Sygnatura: 60378
2. Janusz KOWAL „Podstawy automatyki T2”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004, Sygnatura: 65505
3. Tadeusz Kaczorek „Teoria sterowania. Tom I Układy liniowe ciągłe i dyskretne”. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1977
4. Dariusz Horla „Podstawy automatyki. Ćwiczenia rachunkowe. Część I”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2003.
5. Zbigniew WAŁACH „Cybernetyka techniczna. Część I – Eksploatacja osprzętu”, Wydział Wydawniczy WAT, Warszawa 1983