

**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
im. Jarosława Dąbrowskiego**



Ćwiczenie rachunkowe

Charakterystyki statyczne układów automatycznej regulacji

Podstawy automatyki



**ZAiUL WML WAT
Warszawa 2017**

1 Cel ćwiczenia rachunkowego

Podczas ćwiczenia poruszane będą następujące zagadnienia:

- linearyzacja równań opisujących zachowanie się nieliniowego elementu automatycznej regulacji;
- wyznaczenie charakterystyki statycznej układu automatycznej regulacji.

Celem ćwiczenia jest zdobycie umiejętności praktycznej realizacji powyższych zagadnień.

2 Wymagania wstępne

Przed rozpoczęciem ćwiczeń student zobowiązany jest do zapoznania się z treścią niniejszej instrukcji. W szczególności istotne jest posiadanie wiedzy teoretycznej z zakresu poruszanego podczas ćwiczenia rachunkowego. Ponadto student zobowiązany jest prześledzić ze zrozumieniem wszystkie zamieszczone przykłady, aby wiedzieć w jaki sposób rozpocząć rozwiązywanie zadań podczas ćwiczeń. W przypadku posiadania wątpliwości po zapoznaniu się z treścią instrukcji w celu ich wyjaśnienia zaleca się konsultacje się z prowadzącym przed terminem ćwiczeń rachunkowych.

3 Wiadomości ogólne

Aby dokonać analizy elementów i układów automatyki należy je scharakteryzować za pomocą dostępnych metod – opisowo, analitycznie, graficznie, itp. W tym celu należy opisać zjawiska fizyczne zachodzące w analizowanym układzie oraz jego właściwości. Jednak zazwyczaj układy rzeczywiste są bardzo złożone i określenie ogólne wszystkich właściwości może być trudne lub nawet niemożliwe. W takim przypadku należy poczynić różnego rodzaju założenia upraszczające, czyli należy ustalić które elementy układu, jakie zjawiska i parametry oraz jakie ich zakresy są istotne z punktu widzenia sterowania. Opracowany w ten sposób opis zachowania się pojedynczych elementów lub całych układów automatyki nazywamy *modelem matematycznym elementu lub układu automatyki*. Modele te mogą być przedstawione za pomocą:

- równań lub układów równań algebraicznych, różniczkowych, różnicowych, całkowych, itp.;
- transmitancji operatorowej i widmowej;
- modelu układu w przestrzeni stanów;
- charakterystyk czasowych i częstotliwościowych;
- charakterystyk statycznych i dynamicznych.

Charakterystyką statyczną układu nazywamy zależność sygnału wyjściowego w funkcji sygnału wejściowego w stanie ustalonym, tzn. gdy pochodne zmiennych (współrzędnych) układu względem czasu są równe zero (po zaniknięciu procesu przejściowego dla $t \rightarrow \infty$).

Linearyzując układy złożone należy rozpatrzeć charakterystyki statyczne poszczególnych elementów układu. *Linearyzacja jest procesem tworzenia modelu liniowego, który aproksymowałby model nieliniowy*. Tak więc, linearyzacja polega na znalezieniu takich

równań liniowych, które z pewnym przybliżeniem opisują własności analizowanego układu dla niewielkich zmian sygnałów wokół ich wartości ustalonej.

Podczas ćwiczeń omówione zostaną dwie metody linearyzacji:

1. *linearyzacja statyczna*, która dotyczy układów automatyki opisanych nieliniowymi równaniami algebraicznymi;
2. *linearyzacja dynamiczna* dotycząca układów automatyki opisanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi.

4 Wykorzystanie szeregu Taylora w procesie linearyzacji

Niech układ fizyczny o sygnale wejściowym u i sygnale wyjściowym y będzie opisany równaniem różniczkowym nieliniowym o postaci:

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}, \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad u^{(m)} = \frac{d^{(m)}u}{dt^{(m)}}$$

Jeśli przyjmiemy punkt pracy na charakterystykach:

$$D = (y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n)}, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(m)})$$

Rozwinięcie funkcji F w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy ma postać:

$$\begin{aligned} F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) = \\ = F(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n)}, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(m)}) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 \Delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_0 \Delta \dot{y} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_0 \Delta y^{(n)} + \\ + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_0 \Delta u + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_0 \Delta \dot{u} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_0 \Delta u^{(m)} + R_n \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0, \dots, itd. - \text{ pochodne cząstkowe w punkcie równowagi};$$

$\Delta y, \Delta \dot{y}, \dots, itd.$ - przyrosty sygnałów i ich pochodnych względem czasu, liczone w odniesieniu do punktu równowagi oznaczonego umownie przez 0:

$$\Delta y = y - y_0, \quad \Delta \dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_0, \quad \dots$$

$$\Delta u = u - u_0, \quad \Delta \dot{u} = \dot{u} - \dot{u}_0, \quad \dots$$

R_n – reszta nieliniowa równa sumie wyrazów szeregu Taylora zawierających pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

Gdy rozważymy zachowanie się elementu przy niewielkim odchyleniu od położenia równowagi, to przyrosty sygnałów i ich pochodnych są niewielkie, dlatego w przybliżeniu można pominąć wyrazy zawierające iloczyny przyrostów oraz te przyrosty w potęgach drugiej i wyższej, a zatem można przyjąć, że $R_n=0$.

$$\begin{aligned} \Delta F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) &= \\ &= F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) - F(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n)}, u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(m)}) = \\ &= + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_0 \Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \Big|_0 \Delta y^{(n)} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_0 \Delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \Delta \dot{u} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \Big|_0 \Delta u^{(m)} \end{aligned} \quad (3)$$

W ten sposób otrzymaliśmy zlinearyzowaną postać nieliniowej funkcji F w otoczeniu dynamicznego punktu pracy D .

Szczególnym przypadkiem linearyzacji dynamicznej jest linearyzacja statyczna (na charakterystyce statycznej). Linearyzacji dokonujemy przez analogiczne rozwinięcie funkcji w szereg Taylora wokół statycznego punktu pracy S .

$$\begin{aligned} S = (y_0, \dot{y}_0 = 0, \dots, y_0^{(n)} = 0, u_0, \dot{u}_0 = 0, \dots, u_0^{(m)} = 0) \\ \Delta F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) &= \\ &= F(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) - F(y_0, u_0) = \\ &= + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_0 \Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_0 \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \Big|_0 \Delta y^{(n)} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_0 \Delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \Delta \dot{u} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \Big|_0 \Delta u^{(m)} \end{aligned} \quad (4)$$

5 Linearyzacja statyczna

Niech dana będzie zależność $y=f(x)$. Graficzny obraz tej zależności przedstawia rys.1. Proces linearyzacja polega na:

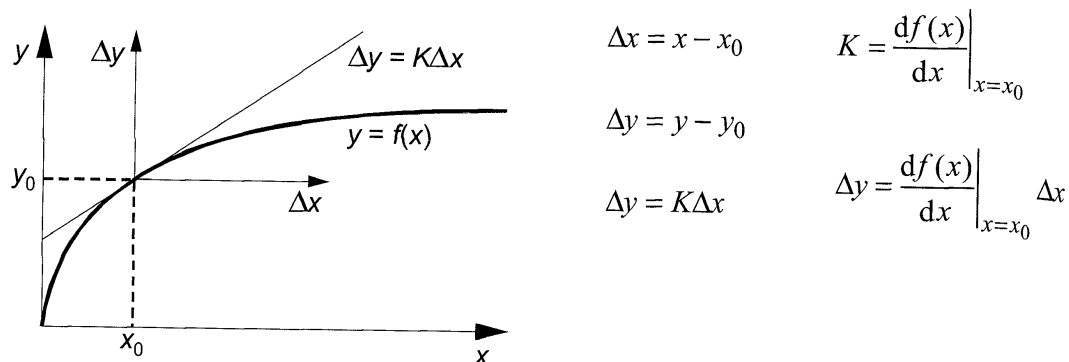
- przeniesieniu układu współrzędnych do punktu pracy;
- zastąpieniu sygnałów w opisie matematycznym odchyleniami tych wartości w punkcie pracy;
- zastąpieniu krzywej reprezentującej zależność $y=f(x)$ styczną do niej w punkcie pracy.

W przypadku kilku sygnałów wejściowych, na przykład $y=f(x_1, x_2)$, wtedy:

$$\Delta y = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_{x_{10}} \cdot \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]_{x_{20}} \cdot \Delta x_2 \quad (5)$$

Analogicznie, gdy $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, wtedy:

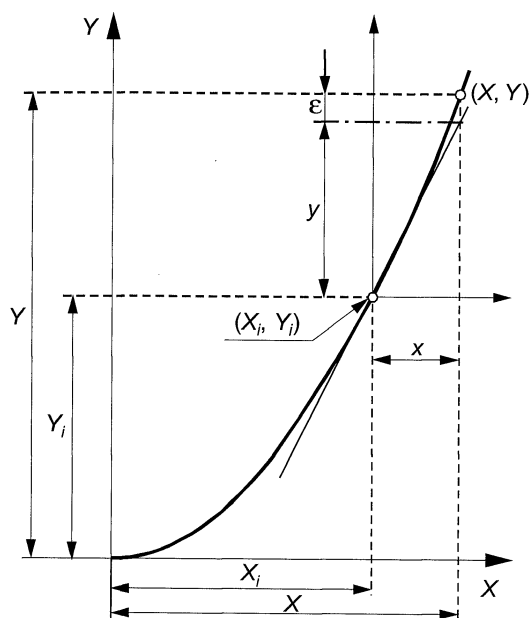
$$\Delta y = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right]_{x_{i0}} \cdot \Delta x_1 + \dots + \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right]_{x_{i0}} \cdot \Delta x_n \quad (6)$$



Rys.1. Linearyzacja statyczna funkcji

5.1 Przykład 1.

Charakterystykę elementu opisywanego funkcją $Y=X^2$ przedstawia rys.2. Zakładając, że zakres zmienności sygnałów wokół punktu pracy X_i, Y_i jest mały, równanie nieliniowe zastępuje się przybliżonym równaniem liniowym, uzyskując za cenę wprowadzenia przybliżonego opisu matematycznego możliwość zastosowania teorii układów liniowych.



Rys.2. Linearyzacja funkcji $Y=X^2$

Jak pokazano na rys.2, wybieramy punkt pracy (X_i, Y_i) i rysujemy styczną do krzywej w tym punkcie. Rozpatrując ten punkt otrzymamy:

$$Y = Y_i + y + \varepsilon \approx Y_i + y \quad (7)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{dY}{dX_i} - \text{nachylenie w punkcie } (X_i, Y_i) \quad (8)$$

stąd:

$$y = \frac{dY}{dX} \Big|_i x = \frac{d}{dX} (X^2) \Big|_i x = 2X_i x \quad (9)$$

zatem:

$$Y = Y_i + 2X_i x \quad (10)$$

Często przesuwamy początek układu współrzędnych do punktu pracy (położenia równowagi) określonego przez współrzędne (X_i, Y_i) .

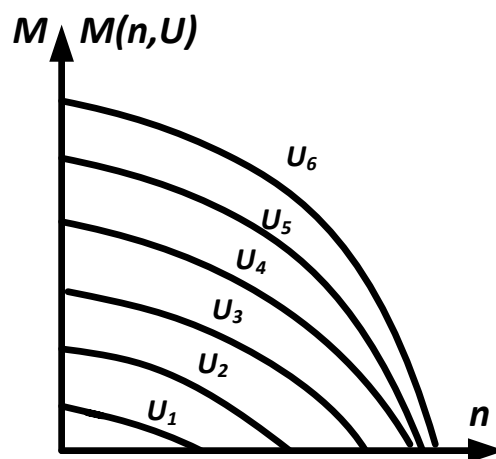
6 Linearyzacja dynamiczna

Jedną z metod sprowadzania równań nieliniowych do postaci równań liniowych jest metoda linearyzacji dynamicznej, która polega na zapisaniu równania nieliniowego układu szeregiem Taylora w otoczeniu punktu pracy. Punktem tym jest stan ustalony (równowagi).

Przy założeniu, że odchylenie od punktu pracy jest niewielkie, można w szeregu Taylora pominąć część nieliniową (wyrazy, w których występują wyższe pochodne) jako dostatecznie małą. Otrzymane równanie jest równaniem liniowym, które opisuje dynamikę układu w punkcie pracy oraz w jego niewielkim otoczeniu, ponieważ nieliniowe charakterystyki statyczne zastąpiliśmy stycznymi do nich w punktach pracy.

Często charakterystyki statyczne występują w postaci rodziny charakterystyk, wtedy, gdy charakterystyka jest funkcją wielu zmiennych, np. moment obrotowy silnika elektrycznego jest funkcją dwóch podstawowych wielkości, a mianowicie napięcia sterującego pracą silnika oraz jego prędkości obrotowej $M=f(U,n)$.

Linearyzując układy złożone należy rozpatrzyć charakterystyki statyczne poszczególnych elementów układu.



Rys.3. Rodzina charakterystyk statycznych dwufazowego silnika elektrycznego $M(U,n)$.

Jeżeli układ jest stacjonarny, to w punkcie pracy odpowiadającym punktowi równowagi, pochodne cząstkowe występujące w równaniu (2) są stałe:

$$a_0 = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0, \quad a_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_0, \quad \dots, \quad a_n = \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_0$$

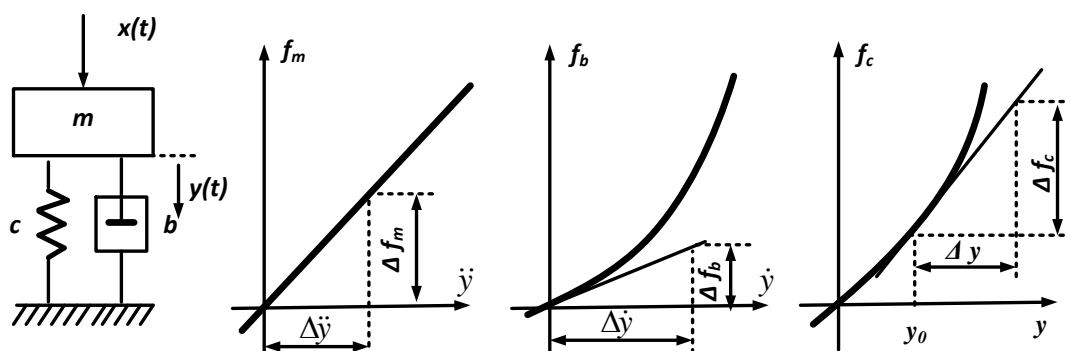
$$b_0 = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_0, \quad b_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_0, \quad \dots, \quad b_m = \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_0$$

Wówczas równanie (2) przyjmuje postać:

$$\Delta F = a_0 \Delta y + a_1 \Delta \dot{y} + \dots + a_n \Delta y^{(n)} + b_0 \Delta u + b_1 \Delta \dot{u} + \dots + b_m \Delta u^{(m)} + R_n \quad (11)$$

6.1 Przykład 2.

Opisać dynamikę układu masa – tłumik - sprężyna przedstawiony na rys.4. Na rysunku tym przedstawiono również charakterystyki statyczne siły bezwładności, tłumika i sprężyny. Sygnałem wejściowym jest siła $x(t)$, a sygnałem wyjściowym położenie masy $y(t)$.



Rys.4. Układ masa – tłumik – sprężyna i jego charakterystyki statyczne.

Opis układu na podstawie zasady d’Alamberta ma postać:

$$\varphi = f_m(\ddot{y}) + f_b(\dot{y}) + f_c(y) - x(t) = 0 \quad (12)$$

gdzie: f_m siła bezwładności;

f_b – siła wytworzona przez tłumik;

f_c – siła sprężyny.

Rozpatrując charakterystyki statyczne układu możemy zapisać, że funkcja φ jest nieliniową zależnością \ddot{y} , \dot{y} , y , x (nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu):

$$\varphi[f_m(\ddot{y}), f_b(\dot{y}), f_c(y), x(t)] = \varphi[\ddot{y}, \dot{y}, y, x] = 0 \quad (13)$$

Równanie (13) jest ogólną postacią równania (12). W celu przeprowadzenia linearyzacji tej funkcji przyjmujemy punkt pracy o współrzędnych: $\ddot{y} = 0$, $\dot{y} = 0$, $y = y_0$, $x(t) = x_0$, tj. stan ustalony w układzie ($\ddot{y} = 0$, $\dot{y} = 0$), gdzie położenie masy y_0 wynika z działania siły x_0 (w stanie ustalonym równanie (12) ma postać $f_c = x_0$).

Rozwijając nieliniową funkcję w szereg Taylora w otoczeniu przyjętego punktu pracy $(0, 0, y_0, x_0)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(\Delta\ddot{y}, \Delta\dot{y}, y_0 + \Delta y, x_0 + \Delta x) - \varphi(0, 0, y_0, x_0) = \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^o \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^o \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^o \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^o \Delta x + \\ &= \underbrace{\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\ddot{y}^2}\right)^o \Delta\ddot{y}^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\ddot{y}\partial\dot{y}}\right)^o \Delta\ddot{y}\Delta\dot{y} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{y}\partial y}\right)^o \Delta\dot{y}\Delta y + \dots +}_{R} \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^o, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^o, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^o, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^o$ - pochodne cząstkowe w punkcie pracy;

$\Delta\ddot{y}, \Delta\dot{y}, \Delta y, \Delta x$ - odchylenia sygnałów \ddot{y}, \dot{y}, y, x od punktu pracy;

R_n – nieliniowa część rozwinięcia funkcji φ w szereg Taylora.

Z równania (13) wynika, że lewa strona równania (14) jest równa zero. Pomijając nieliniową część szeregu Taylora R_n jako dostatecznie małą otrzymamy równanie różniczkowe liniowe postaci:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^o \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^o \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^o \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^o \Delta x = 0} \quad (15)$$

Podane wyżej rozważania można łatwo uogólnić na przypadek układu o dowolnej liczbie wejść i opisanego równaniem dowolnego rzędu.

W tym przypadku, obliczając pochodne cząstkowe poprzez różniczkowanie równania (12) oraz wykreślając styczne w punkcie pracy do charakterystyk statycznych (rys.4) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^o &= \left(\frac{df_m}{d\ddot{y}}\right)^o = \frac{\Delta f_m}{\Delta\ddot{y}} = m \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^o &= \left(\frac{df_b}{d\dot{y}}\right)^o = \frac{\Delta f_b}{\Delta\dot{y}} = b_0 \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^o &= \left(\frac{df_c}{dy}\right)^o = \frac{\Delta f_c}{\Delta y} = c_0 \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^o &= \left(-\frac{dx}{dx}\right)^o = -1 \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: m – masa układu, w tym przypadku jest ona stała i dlatego charakterystyka $F_m(y)$ jest linią prostą; b_0 – współczynnik tłumienia tłumika w punkcie $y=0$; c_0 – współczynnik sprężyny w punkcie $y=y_0$.

W równaniach (16) pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial}$ zastąpiliśmy pochodnymi $\frac{d}{d}$, ponieważ funkcje $f_m(\ddot{y})$, $f_b(\dot{y})$, $f_c(y)$ i $x(t)$ są funkcjami jednej zmiennej.

Wprowadzając powyższe oznaczenia otrzymamy zlinearyzowane równania różniczkowe opisujące dynamikę układu masa – tłumik – sprężyna w postaci:

$$m \frac{d^2 \Delta y}{dt^2} + b_0 \frac{d \Delta y}{dt} + c_0 \Delta y = \Delta x \quad (17)$$

gdzie: Δy i Δx odchylenia zmiennych y i x od punktu pracy.

W omawianym przykładzie linearyzację można przeprowadzić prościej linearyzując kolejno wyrazy równania (12), to znaczy funkcje $f_m(\ddot{y})$, $f_b(\dot{y})$, $f_c(y)$. Rozpisując powyższe funkcje w szereg Taylora i pomijając nieliniową część tego szeregu otrzymamy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} \Delta f_m(\ddot{y}) &= \left(\frac{df_m}{d\ddot{y}} \right)^o \Delta \ddot{y} = m \frac{d^2 \Delta y}{dt^2} \\ \Delta f_b(\dot{y}) &= \left(\frac{df_b}{d\dot{y}} \right)^o \Delta \dot{y} = b_0 \frac{d \Delta y}{dt} \\ \Delta f_c(y) &= \left(\frac{df_c}{dy} \right)^o \Delta y = c_0 \Delta y \\ \Delta x(t) &= \left(\frac{dx}{dx} \right)^o \Delta x = \Delta x \end{aligned} \quad (18)$$

Podstawiając równanie (18) do równania (12) otrzymamy równanie zlinearyzowane postaci:

$$m \frac{d^2 \Delta y}{dt^2} + b_0 \frac{d \Delta y}{dt} + c_0 \Delta y = \Delta x \quad (19)$$

czyli taką samą postać jak w poprzednio omawianej metodzie (równanie 17).

6.2 Przykład 3.

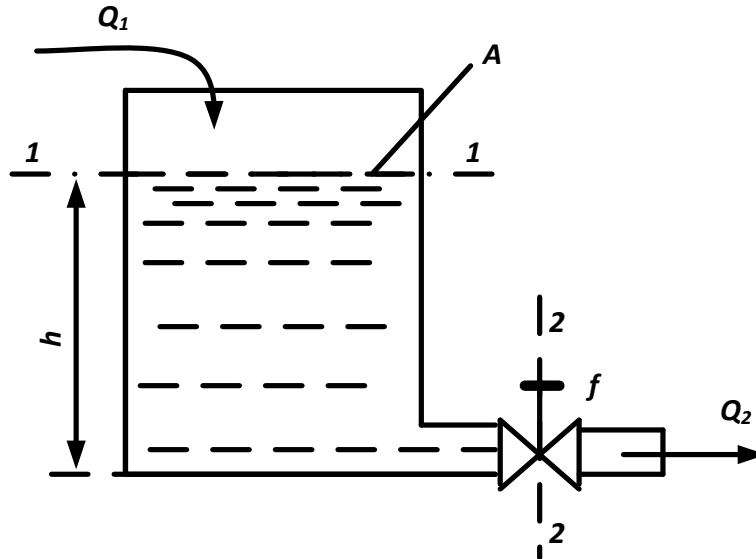
Jako przykład na linearyzację układu nieliniowego niech posłuży zbiornik w wypływie swobodnym cieczy. Schemat opisywanego elementu pokazano na rys.3.3, gdzie sygnałami wejściowymi są: Q_1 – natężenie dopływu cieczy do zbiornika oraz f – powierzchnia przepływu przez zawór, sygnałem wyjściowym jest h – poziom cieczy w zbiorniku.

W stanach nieustalonych zmiany poziomu cieczy w zbiorniku można opisać za pomocą równania:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (20)$$

gdzie: A – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika;

Równanie to mówi, że zmiana ilości cieczy w zbiorniku jest równa różnicy natężenia dopływu Q_1 i natężenia wypływu Q_2 cieczy ze zbiornika.



Rys.5. Zbiornik z wypływem swobodnym cieczy.

Jeśli rozpatrzmy równanie Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + 0 \quad (21)$$

przyjmując prędkość $V_1 = 0$ oraz $p_1 = p_2$ (ciśnienie atmosferyczne), otrzymamy:

$$V_2 = \sqrt{2gh} \quad (22)$$

ponieważ:

$$Q_2 = fV_2 = f\sqrt{2gh} \quad (23)$$

Wstawiając równanie (23) do równania (20) otrzymamy;

$$A \frac{dh}{dt} = Q_1 - f\sqrt{2gh} \quad (24)$$

Równanie (24) określające zachowanie omawianego układu jest równaniem różniczkowym nieliniowym, które należy zlinearyzować. Przyjmijmy współrzędne punktu pracy h_n , Q_{1n} , f_n , w otoczeniu, którego przeprowadzimy linearyzację. Współrzędne punktu pracy wynikają z równania określającego stan ustalony w układzie. Stan ustalony w tym przypadku jest określony stałością poziomu cieczy w zbiorniku $dh/dt=0$.

Stąd z równania (24) wynika, że równanie opisujące stan ustalony ma postać:

$$Q_1 = f\sqrt{2gh} \quad (25)$$

Z wymagań stawianych projektowaniu układu podane będzie np. że poziom cieczy w zbiorniku wynosi h_n , a natężenie dopływu cieczy do zbiornika wynosi Q_{1n} . Z równania (25) możemy określić powierzchnię przepływu przez zawór f_n :

$$f_n = \frac{Q_{1n}}{\sqrt{2gh_n}} \quad (26)$$

Przeprowadzając linearyzację równania (24) wokół punktu pracy zastępujemy rzeczywiste wielkości występujące w równaniu ich przyrostami Δ , stąd otrzymamy:

$$A \frac{d\Delta h}{dt} = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 \quad (27)$$

W równaniu tym nieliniowość ukryta jest w ΔQ_2 , wobec czego wystarczy zlinearyzować tylko tę część równania. Aby zlinearyzować układ rozpiszemy nieliniową funkcję określającą natężenie wypływu cieczy $Q_2=Q_2(h, f)$ w szereg Taylora:

$$\Delta Q_2 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} \Delta h + \left. \frac{\partial Q_2}{\partial f} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} \Delta f + \underbrace{\left[\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial h^2} \Delta^2 h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial h \partial f} \Delta h \Delta f + \dots \right]}_R \quad (28)$$

gdzie: R – nieliniowa część szeregu Taylora może być pominięta, o ile jest dostatecznie mała.

Przyjmując:

$$\left. \frac{\partial Q_2}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = a_1 \quad \left. \frac{\partial Q_2}{\partial f} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = a_2 \quad (29)$$

i wstawiając równanie (28) i (29) do równania (27) otrzymamy zlinearyzowane równanie opisujące zachowanie układu:

$$A \frac{d\Delta h}{dt} + a_1 \Delta h = \Delta Q_1 - a_2 \Delta f \quad (30)$$

W równaniu należy wyznaczyć wartości współczynników a_1 , a_2 , które można przeprowadzić dwoma metodami:

1. Ponieważ znamy równanie określające funkcję $Q_2 = Q_2(f, h)$ możemy policzyć bezpośrednio wartości tych współczynników obliczając wartości odpowiednich pochodnych cząstkowych w punkcie pracy:

$$a_1 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = f_n \sqrt{\frac{g}{2h_n}} \quad (31)$$

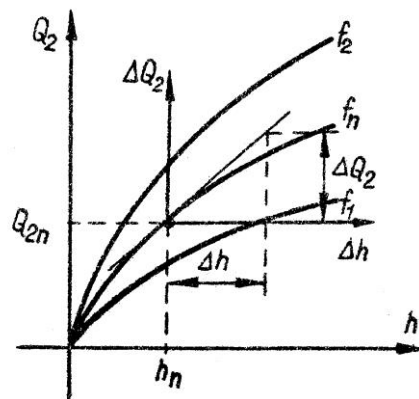
$$a_2 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial f} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = \sqrt{2gh_n}$$

2. Gdyby funkcja $Q_2 = Q_2(f, h)$ nie byłaby znana, to należy przeprowadzić odpowiednie pomiary mające na celu określenie zależności Q_2 od f oraz h . Przykładowe wyniki pomiarów przedstawione są na rys.6 i rys.7.

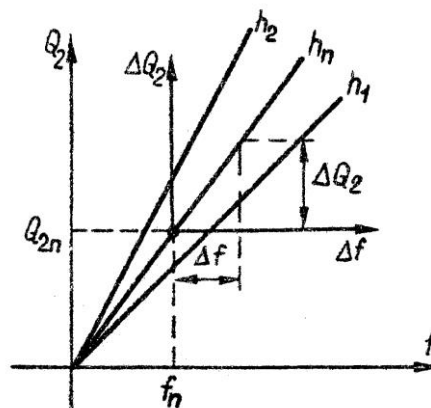
Po zlinearyzowaniu, tzn. zastąpieniu odpowiednich krzywych na rys.6 i rys.7, stycznymi do nich w punkcie pracy oraz określeniu ich nachylenia otrzymamy:

$$a_1 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta h}$$

$$a_2 = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial f} \right|_{\substack{h=h_n \\ f=f_n}} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta f}$$



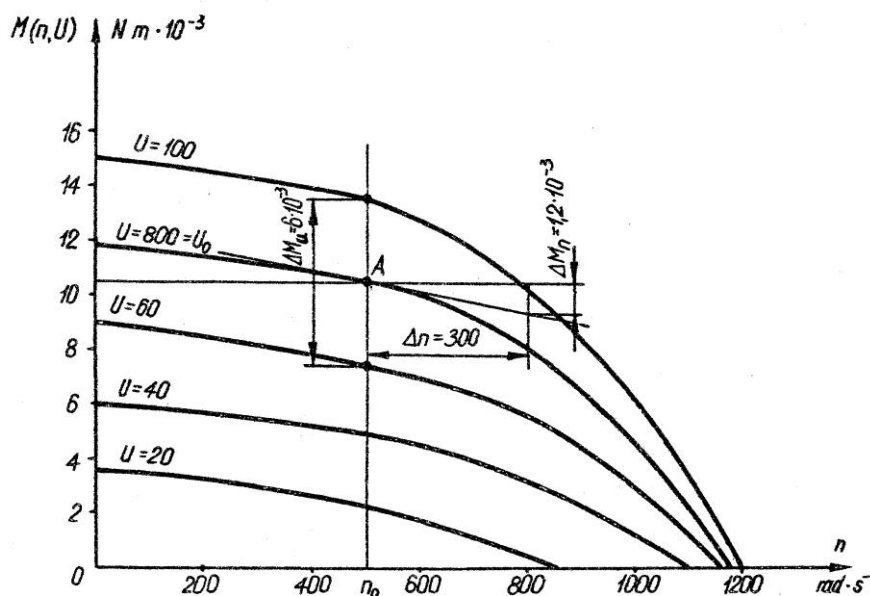
Rys.6. Charakterystyka statyczna zaworu $Q_2=Q_2(h)$.



Rys.7. Charakterystyka statyczna zaworu $Q_2=Q_2(f)$.

6.3 Przykład 4.

Wyznaczyć zlinearyzowane równanie opisujące zachowanie dwufazowego silnika elektrycznego nieobciążonego momentem zewnętrznym, o momencie bezwładności wirnika równym I. Rodzina charakterystyk statycznych tego silnika podana jest na rys.8.



Rys.8. Charakterystyki statyczne silnika dwufazowego.

Równanie opisujące zachowanie się takiego silnika wynika z prawa d'Alemberta:

$$I \cdot \dot{n} = M(n, U) \quad (32)$$

gdzie: M – moment obrotowy silnika;

U - napięcie zasilające będące wielkością wejściową;

n – prędkość obrotowa silnika będąca wielkością wejściową;

Równanie (32) jest równaniem różniczkowym nieliniowym (nieliniowe charakterystyki statyczne – rys.8), które należy zlinearyzować. Przyjmujemy punkt pracy A o współrzędnych n_0 i U_0 , ponieważ w równaniu (32) nieliniowa jest funkcja $M(n,U)$, rozpisujemy ją w szereg Taylora:

$$\Delta M(n, U) = \left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta n + \left. \frac{\partial M}{\partial U} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta U + R \quad (33)$$

Przechodząc na przyrosty wielkości od punktu pracy i przyjmując, że R – nieliniowa część szeregu Taylora jest równa zero, otrzymamy zlinearyzowane równanie opisujące zachowanie omawianego silnika dwufazowego w postaci:

$$I \Delta \dot{n} = \left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta n + \left. \frac{\partial M}{\partial U} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta U \quad (34)$$

Odpowiednio porządkując równanie (24) otrzymamy:

$$I\Delta\dot{n} - \left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta n = \left. \frac{\partial M}{\partial U} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} \Delta U \quad (35)$$

a dzieląc stronami przez $\left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}}$ otrzymamy:

$$T\Delta\dot{n} + \Delta n = k\Delta U \quad (36)$$

$$\text{gdzie: } T = \frac{I}{\left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}}}; \quad k = \frac{\left. \frac{\partial M}{\partial U} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}}}{\left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}}}$$

Wartość pochodnych cząstkowych występujących we wzorze (33) określamy z charakterystyk statycznych silnika – rys.8. Np. przyjmując punkt pracy $u_0 = 80 \text{ V}$, $n_0 = 500 \text{ rad/s}$ oraz $I = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ N s}^2 \text{ m}$, otrzymamy:

$$\left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} = \frac{\Delta M_U}{\Delta U} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{40} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ NmV}^{-1}$$

$$\left. \frac{\partial M}{\partial n} \right|_{\substack{n=n_0 \\ U=U_0}} = \frac{\Delta M_n}{\Delta U} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{300} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Nsm}$$

Stąd:

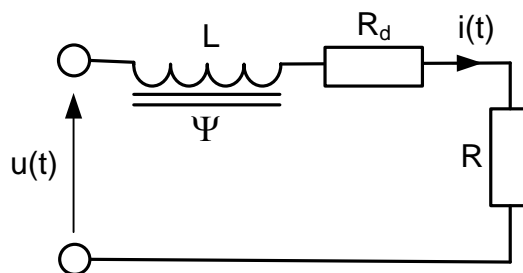
$$T = \frac{0,2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 0,05 \text{ s}; \quad k = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-6}} = 37,5 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Podstawiając obliczone wartości do równania (34) otrzymamy ostateczną postać zlinearyzowanego równania opisującego omawiany układ:

$$0,05 \frac{d\Delta n}{dt} + \Delta n = 37,5 \Delta U$$

6.4 Przykład 5.

Dany jest obwód elektryczny (rezystor + cewka z rdzeniem) przedstawiony na rys.9.



Rys.8. Schemat obwodu elektrycznego.

Strumień magnetyczny dławika wynosi:

$$\Psi(t) = k\sqrt{i(t)} \quad k=\text{const}$$

Równanie układu można zapisać:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} + (R_d + R)i(t) = u(t) \quad (37)$$

Podstawiając za $\Psi(t)$, otrzymamy:

$$\frac{k}{2\sqrt{i(t)}} \frac{di(t)}{dt} + (R_d + R)i(t) = u(t) \quad (38)$$

Równanie (38) zapiszemy w ogólnej postaci:

$$F[i(t), i(t), u(t)] = 0 \quad (39)$$

Przyjmujemy punkt ustalonej pracy przy napięciu u_0 i prądzie i_0 . Następnie znajdujemy pochodne cząstkowe względem czasu w punkcie pracy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 = (R + R_d) - \frac{k(i_0)}{4\sqrt{i_0^3}} = R + R_d, \quad \text{bo } (i_0)' = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 = \frac{k}{2\sqrt{i_0}} \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 = -1$$

Rozwijając lewą stronę równania (39) w szereg Taylora w otoczeniu punktu pracy ustalonej $u=u_0$ i $i=i_0$, otrzymujemy po pominięciu reszty nieliniowej:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 \Delta i + \left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 \Delta i + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \Delta u = 0 \quad (40)$$

Po podstawieniu pochodnych cząstkowych w punkcie pracy otrzymamy:

$$(R + R_d)\Delta i + \frac{k}{2\sqrt{i_0}} \Delta i = \Delta u \quad (41)$$

Przyjmując $\Delta i=i$ oraz $\Delta u=u$ uzyskujemy:

$$\frac{k}{2\sqrt{i_0}} i + (R + R_d)i = u \quad (42)$$

6.5 Przykład 6.

Dokonać linearyzacji równania różniczkowego (43) w punkcie pracy $y_0 = 0,5$, $dy_0/dt=1$, $dy_0^2/dt^2=0,4$.

$$3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 4y^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3y \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \frac{dy}{dt} = 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + x \quad (43)$$

Rozwijamy funkcję po lewej stronie równania (43) w szereg Taylora oraz pomijając nieliniową część tego rozwinięcia otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} &= \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} \end{aligned} \quad (44)$$

Obliczając pochodne cząstkowe w punkcie pracy otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 8y_0 \dot{y}_0^2 \ddot{y}_0 + 3\ddot{y}_0^2 = 8 \cdot 0,5 \cdot 1^2 \cdot 0,4 + 3 \cdot (0,4)^2 = 2,08$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 = 8y_0^2 \dot{y}_0 \ddot{y}_0 + 1 = 8 \cdot (0,5)^2 \cdot 1 \cdot 0,4 + 1 = 1,8$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 = 4y_0^2 \dot{y}_0^2 + 6y_0 \dot{y}_0 = 4 \cdot (0,5)^2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 2,2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 = 1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 = 3$$

Podstawiając powyższe zależności do równania (44) otrzymujemy zlinearyzowane równanie (43) w przyjętym punkcie pracy:

$$2,08\Delta y + 1,8\Delta \dot{y} + 2,2\Delta \ddot{y} + 3\Delta \dot{x} = \Delta x + 3\Delta \dot{x} \quad (45)$$

6.6 Przykład 7.

Równanie (46) opisuje pewien układ z jednym wejściem x i jednym wyjściem y . Należy przeprowadzić linearyzację tego równania wokół punktu pracy o współrzędnej $x_0=1$.

$$y = 2x^2 + x - 1 \quad (46)$$

Powyższe równanie stanowi funkcję dwóch zmiennych $f(x,y)$ spełniającą zależność:

$$f(x, y) = y - 2x^2 - x + 1 = 0 \quad (47)$$

Punkt pracy jest więc określony przez dwie współrzędne x_0, y_0 . Podstawiając współrzędną $x_0=1$ do równania (46) otrzymujemy:

$$y_0 = 2x_0^2 + x_0 - 1 \Rightarrow y_0 = 2 \quad (48)$$

Po obliczeniu drugiej współrzędnej punktu pracy można przystąpić do linearyzacji, tzn. zastąpienia krzywej opisanej równaniem (46) styczną do niej w punkcie pracy (x_0, y_0) . W tym celu rozwija się funkcję $f(x, y)$ w szereg Taylora wokół punktu (x_0, y_0) i pomija wyrazy nieliniowe tego rozwinięcia:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0$$

Ponieważ punkt (x_0, y_0) spełnia równanie (47) więc $f(x_0, y_0) = 0$. Stąd powyższe równanie przyjmuje postać:

$$f(x, y) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0$$

Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych w punkcie pracy (x_0, y_0) oraz zmianie zmiennych $x = x - x_0$ i $y = y - y_0$, co odpowiada przesunięciu układu współrzędnych do punktu pracy uzyskuje się zlinearyzowane równanie wiążące przyrosty zmiennych i słuszne w niewielkim otoczeniu punktu (x_0, y_0) :

$$-5\Delta x + \Delta y = 0$$

7 Literatura

1. Zbigniew WAŁACH „Cybernetyka techniczna. Część I – Eksploatacja osprzętu”, Wydział Wydawniczy WAT, Warszawa 1983
2. Janusz KOWAL „Podstawy automatyki TI”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2004.
3. Michał BOGACKI, Maciej CHOROWSKI, Ewa ŚLIFIRSKA „Zbiór zadań z podstaw automatyki”, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1988.